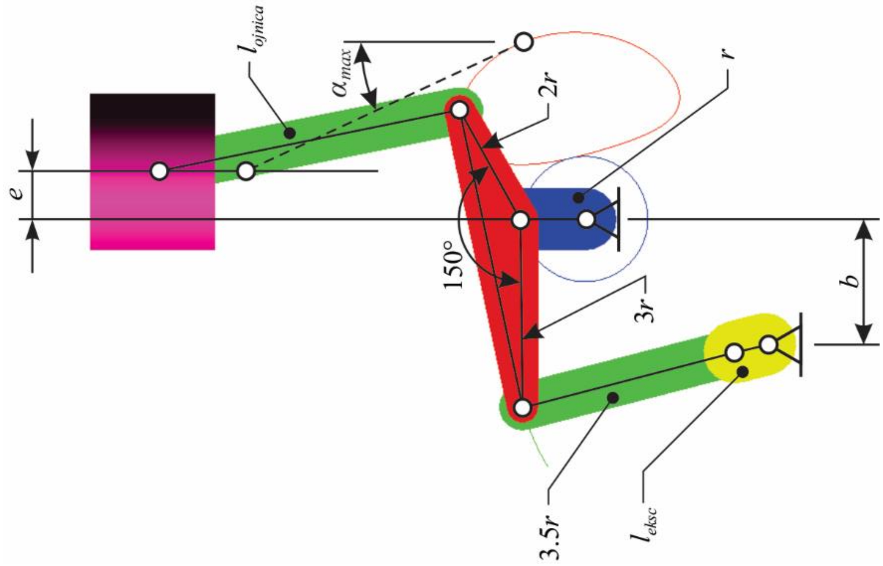
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Analiza in sinteza mehanizmov

Postopki reševanja izbranih primerov

Robert Kunc, Simon Krašna



Ljubljana, 2024

UNIVERZA V LJUBLJANI | FS Fakulteta za strojništvo

Analiza in sinteza mehanizmov

Postopki reševanja izbranih primerov

Robert Kunc, Simon Krašna

Ljubljana, 2024

Naslov dela:	Analiza in sinteza mehanizmov – postopki reševanja izbranih primerov
Avtorja:	dr. Robert Kunc, dr. Simon Krašna
Recenzenti:	dr. Nikolaj Mole, dr. Jerman Boris, dr. Marko Kegl
Jezikovni pregled:	Slobodanka Ivanjić Kostrešević
Ilustracije:	Robert Kunc, Simon Krašna (razen, kjer je drugače navedeno)
Izdala in založila:	Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva cesta 6, 1000 Ljubljana
Izdaja:	1. elektronska izdaja
Leto izida:	2024
Cena:	prosto dostopno na repozitoriju Univerze v Ljubljani

Naslov:	Analiza in sinteza mehanizmov – postopki reševanja izbranih primerov
URL:	https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=161481

Katasložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 206961411

ISBN 978-961-7187-09-0 (PDF)

Predgovor

Temeljita obravnava mehanizmov je v splošnem zahtevna problematika, kjer je praktično nujna uporaba ustrezne računalniške podpore. Kljub temu so se v zgodovini nauka o mehanizmih razvile učinkovite metode za analizo in sintezo, ki pokrijejo širok spekter mehanizmov v praksi. Zbirka rešenih nalog je nastala z namenom pojasniti potek reševanja nekaterih najpogostejših nalog, kakršne srečamo pri študiju mehanizmov. Teoretično podlago in dodatna pojasnila študentje dobijo na predavanjih ter s samostojno uporabo priporočene literature. Dosedanje pedagoške izkušnje namreč kažejo na primanjkljaj tovrstnega študijskega gradiva v slovenskem prostoru.

V prvem delu učbenika so ob dodatni razlagi predstavljeni postopki reševanja izbranih pogostejših problemov s področja mehanizmov, drugi del pa obsega dodatne primere rešenih nalog.

V osnovi je delo namenjeno najprej študentom Fakultete za strojništvo in sorodnih študijskih programov. Vendar je primerno tudi kot pripomoček vsem, ki želijo na razmeroma preprost način pristopiti k obravnavi nekaterih temeljnih nalog pri analizi in sintezi mehanizmov.

Ljubljana, september 2024

Robert Kunc in Simon Krašna

Kazalo

Predgovor i
Kazalo ii
Kazalo slik iii
A. Osnove 1
Zgled 1: Izračun prostostnih stopenj MacPhersonove obese 1
Zgled 2: Izračun prostostnih stopenj Stewartove platforme 2
Zgled 3: Parametri delovanja štirizgibnega mehanizma 3
B. Kinematika 6
Zgled 4: Kinematična analiza s pomočjo poligona hitrosti in poligona pospeškov 6
Zgled 5: Določanje polov hitrosti za sistem teles 12
Zgled 6: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti 14
Zgled 7: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti. 17
Zgled 8: Sinteza in kinematična analiza štirizgibnega mehanizma 19
Zgled 9: Konstrukcija poloid v analitični obliki 21
Zgled 10: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti 23
Zgled 11: Prijemalna naprava 26
Zgled 12: Gibanje hidravličnega podporja 28
C. Dinamika 34
Zgled 13: Analiza dinamike ročičnega mehanizma 34
D. Krivuljni mehanizmi 43
Zgled 14: Določitev kinematičnih diagramov za krivuljni mehanizem 43
Zgled 15: Oblikovanje krivuljnega mehanizma 46
Zgled 16: Potek kontaktne sile pri krivuljnem mehanizmu 48
Zgled 17: Odmična zagozda s točkovnim slednikom 53
E. Sinteza 57
Zgled 18: Sinteza štirizgibnega mehanizma za delovno območje 57
Zgled 19: Nadaljevanje – sinteza štirizgibnega mehanizma s spremembo vpetja 59
Zgled 20: Enostavna tripoložajna sinteza 62
Zgled 21: Tripoložajna sinteza z znano lego nepomične ročice 66
Zgled 22: Tripoložajna sinteza z znano lego nepomične ročice 71
F. Dodatni zgledi 74
Zgled 23: Analiza ročičnega mehanizma 74
Zgled 23a: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 1) 74
Zgled 23b: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 2) 79
Zgled 24a: Analiza večzgibnega mehanizma (stopnja težavnosti 3) 84
Zgled 24b: Analiza večzgibnega mehanizma 93
Zgled 25: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 4) 95
Zgled 26: Oblikovanje krivuljnega mehanizma 98
Viri 101
Dodatna priporočena literatura 101

Kazalo slik

Slika 1. MacPhersonova obesa; shema (levo); sestavni deli (desno) [1]. 1
Slika 2. Stewartova platforma (levo) [2]; simulator vozil na osnovi Stewartove platforme (desno) [3]. 3
Slika 3. Grashofov štirizgibni mehanizem. 3
Slika 4. Ekstremni vrednosti prenosnega kota za Grashofov mehanizem. 4
Slika 5. Mrtvi legi Grashofovega mehanizma [4]. 5
Slika 6. Štirizgibni mehanizem. 6
Slika 7. Smeri komponent vektorjev hitrosti za opazovane točke. 7
Slika 8. Poligon hitrosti za točko *D*. 8
Slika 9. Poligon hitrosti za točko *C*. 9
Slika 10. Poligon pospeškov za točko *D*. 11
Slika 11. Sistem medsebojno povezanih teles. 12
Slika 12. Primarni poli hitrosti za dani sistem teles. 13
Slika 13. Vsi trenutni poli hitrosti za dani sistem teles. 14
Slika 14. Štirizgibni mehanizem. 14
Slika 15. Primarni poli štirizgibnega mehanizma. 15
Slika 16. Vsi trenutni poli štirizgibnega mehanizma. 15
Slika 17. Analiza hitrosti ročic s pomočjo trenutnih polov hitrosti. 16
Slika 18. Dana lega štirizgibnega mehanizma. 17
Slika 19. Uporaba polov za analizo hitrosti za dano lego štirizgibnega mehanizma. 18
Slika 20. Delovno območje ročičnega mehanizma z drsnikom, brez pogonskega podsklopa. 19
Slika 21. Ročični mehanizem z dodanim pogonskim podsklopom za delovanje 20
Slika 22. Toga palica med tlemi in steno. 21
Slika 23. Gibanje palice – kotaljenje poloid. 23
Slika 24. Mehanizem z dvema drsnikoma. 23
Slika 25. Poli hitrosti za dani mehanizem. 25
Slika 26: Pnevmatska prijemalna naprava [5]. 26
Slika 27. Poli hitrosti za mehanizem prijemalne naprave [5]. 27
Slika 28. Shema hidravličnega podporja [6]. 28
Slika 29. Sekcija hidravličnega podporja (levo) [6]; podporje med obratovanjem (desno) [7]. 28
Slika 30. Vektorska notacija ročic mehanizma. 29
Slika 31. Geometrijski inverziji štirizgibnega mehanizma. 30
Slika 32. Tir točke C na hidravličnem podporju. 32
Slika 33. Prva mrtva lega (levo); druga mrtva lega(desno). 33
Slika 34. Ročični mehanizem z drsnikom. 34
Slika 35. Sklenjena vektorska zanka in druga geometrijska inverzija (črtkano) ročičnega mehanizma. 35
Slika 36. Pomični koordinatni sistem na ročici 2, vezni ročici 3 in drsniku 4. 36
Slika 37. Razčlenitev mehanizma – sistema teles na posamezna telesa, na katera delujejo sile in momenti. 38
Slika 38. Obremenitve ročice 2. 39
Slika 39. Obremenitve ročice 3. 39
Slika 40. Obremenitve na drsniku 4. 40
Slika 41. (levo) lega, hitrost in pospešek drsnika 4; (desno) kotna hitrost in kotni pospešek pogonske ročice 2 in vezne ročice 3 ročičnega mehanizma. 41
Slika 42. Moment na pogonski ročici 2 glede na upoštevano trenje in dodatno obremenitev drsnika, sila trenja med drsnikom in vodilom ter dodatna zunanja sila na drsnik. 42
Slika 43. Krmilni mehanizem ventilov pri motorju z notranjim zgorevanjem [9]. 43
Slika 44. $svaj$-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška. 46
Slika 45. $svaj$-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška. 48
Slika 46. Vrtljiva odmična krivulja s ploskim slednikom. 49
Slika 47. $svaj$-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška. 50

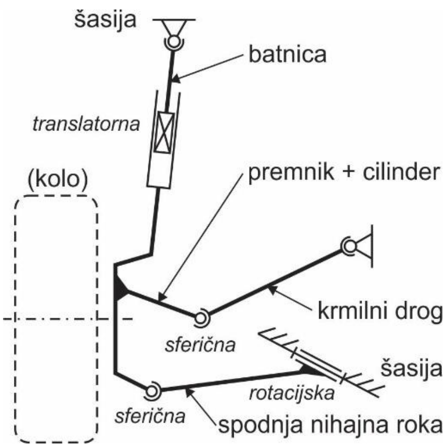
Slika 48. Teoretična kontaktna sila (neprekinjen kontakt). 51
Slika 49. Minimum kontaktne sile (pri pogoju $\cos \omega t = -1$) v odvisnosti od hitrosti obratovanja. 52
Slika 50. Potek kontaktne sile in momenta na gredi pri kotni hitrosti $\omega = 26{,}46$ rads. 53
Slika 51. Odmična zagozda s točkovnim slednikom. 53
Slika 52. Mejne točke faz gibanja na odmični zagozdi. 55
Slika 53. Kontura odmične zagozde. 55
Slika 54. Primerjava pomika slednika za fazo dviga II pri sinusni obliki konture odmične zagozde, $sII(\phi 2)$, in pri enostavnem harmoničnem gibanju, $sII, en. h. (\phi 2)$. 56
Slika 55. Delovno območje ročice 4. 57
Slika 56. Dodana pogonska in vezna ročica. 58
Slika 57. Rešitev za sintezo štirizgibnega mehanizma. 58
Slika 58. Premik vpetja pogonske ročice. 59
Slika 59. Sinteza z upoštevanjem spremenjene lege vpetja ročice 2. 60
Slika 60: Sinteza štirizgibnega mehanizma pri predpisanem razmerju trajanja delovnega in povratnega giba, pri čemer so možne različne rešitve glede na izbiro lege vpetja pogonske ročice. 62
Slika 61. Tri zaporedne lege vezne ročice. 62
Slika 62. Določitev vpetij nepomične ročice. 63
Slika 63. Dodan pogonski mehanizem. 64
Slika 64. Kontrola rešitve tripoložajne sinteze. 65
Slika 65. Različni izvedbi mehanizmov pri dvopoložajni sintezi zagotavljata enako začetno in končno lego ročice *BD*. 65
Slika 66. Tri zaporedne lege vezne ročice, predpisana lega nepomične ročice. 66
Slika 67. Druga zaporedna lega, prenos v inverzijo. 67
Slika 68. Tretja zaporedna lega, prenos v inverzijo. 67
Slika 69. Osnovna tripoložajna sinteza za kinematično inverzijo. 68
Slika 70. Določitev vpetij vezne ročice B in D oz. B' in D' v prvem zaporednem položaju. 68
Slika 71. Želena kinematična inverzija (levo); kontrola delovnega območja (desno). 69
Slika 72. Dodan pogonski mehanizem. 70
Slika 73. Simulacija gibanja mehanizma skozi lege 1–5 [4]. 70
Slika 74. Tri zaporedne lege vezne ročice. 71
Slika 75. Prenos zaporednih leg pri izhodiščni kinematični inverziji. 72
Slika 76. Enostavna tripoložajna sinteza za določitev izhodiščne kinematične inverzije. 72
Slika 77. Želena kinematična inverzija štirizgibnega mehanizma; vezna ročica s točkama $C1'C2'$ se v začetnem položaju nahaja znotraj predpisanega prostora. 73
Slika 78. Podajanje smeri vektorjev. 74
Slika 79. Ročični mehanizem (merilo 1:1). 74
Slika 80. Komponente hitrosti za točko B in P ter poligon hitrosti (merilo 1:1). 75
Slika 81. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1). 76
Slika 82. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (merilo 1:1), 78
Slika 83. Ročični mehanizem. 78
Slika 84. Ročični mehanizem (merilo 1:1). 79
Slika 85. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1). 80
Slika 86. Razmerje hitrosti točk $O1$ in $O2$ (merilo 1:1). 81
Slika 87. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P(merilo 1:1). 82
Slika 88. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke $O2$ (merilo 1:1). 83
Slika 89. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke $O2$ (merilo 1:1). 83
Slika 90. Mehanizem – Zgled 24a (merilo 1:1). 84
Slika 91. Določitev polov hitrosti in prenosnih kotov *(merilo 1:1)* 85
Slika 92. Določitev delovnega območja in mrtvih leg (merilo 1:2); levo: $\gamma = 0°$, desno $\beta = 0°$. 86
Slika 93. Komponente hitrosti za točki B in P ter poligon hitrosti (merilo 1:2); levo: $\gamma = 0°$, desno $\beta = 0°$. 88
Slika 94. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1). 89
Slika 95. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke D in kotnih pospeškov ročic 3 in 4 (merilo 1:1). 91

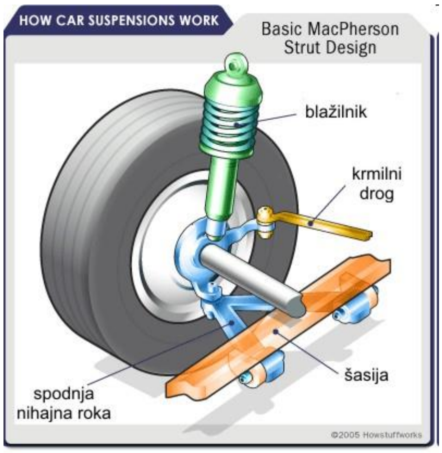
Slika 96. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke C (merilo 1:1). 91
Slika 97. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (merilo 1:1). 92
Slika 98. Mehanizem – Zgled 24b (merilo 1:1). 93
Slika 99. Mehanizem – zgled 25 (merilo 1:1)........ 95
Slika 100. Poligon hitrosti (merilo 1:1). 96
Slika 101. Poligon pospeškov (merilo 1:1). 97
Slika 102. Poligon pospeškov (merilo 2:1). 98
Slika 103. »$svaj$« diagrami gibanja slednika........ 100

A. Osnove

Zgled 1: Izračun prostostnih stopenj MacPhersonove obese

MacPhersonova obesa (slika 1) je najpogosteje uporabljan tip (neodvisne) obese v manjših avtomobilih. Prednost je enostavna, kompaktna in cenena zasnova. Osnovni namen obese je vodenje gibanja kolesa. V splošnem gre pri vzmetenju za 3D mehanizme, pri čemer so poleg togih elementov in blažilnika ter vzmeti lahko vgrajene tudi elastične puše, ki otežijo analizo dinamike vzmetenja.





Slika 1. MacPhersonova obesa; shema (levo); sestavni deli (desno) [1].

Sestavni deli (pet teles oz. šest teles vključno s kolesom):

- šasija – obravnavana kot nepomično telo,
- spodnja nihajna roka,
- premnik + cilinder (skupaj eno telo),
- krmilni drog,
- vzmetna noga s teleskopskim blažilnikom – batnica,
- (kolo).

Kinematične vezi:

- sferična: šasija/blažilnik,
- sferična: premnik/spodnja nihajna roka,
- sferična: premnik (krmilni vzvod)/krmilni drog,
- sferična: šasija/krmilni drog,
- rotacijska: šasija/spodnja nihajna roka,
- translatorna: premnik/batnica,
- (rotacijska: premnik/kolo).

Grüblerjeva formula za izračun prostostnih stopenj prostorskih sistemov teles:

$$m = 6(n_b - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 4j_4 - 5j_5,$$

kjer je:

m … število prostostnih stopenj,
n_b … število teles,
j_1 … število vezi z eno prostostno stopnjo,
j_2 … število vezi z dvema prostostnima stopnjama,
j_3 … število vezi s tremi prostostnimi stopnjami,
j_4 … število vezi s štirimi prostostnimi stopnjami,
j_5 … število vezi s petimi prostostnimi stopnjami.

Po Güblerjevi formuli za dani primer velja:

$$n_b = 5, \quad j_1 = 2, \quad j_3 = 4,$$

$$m = 6(n_b - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 4j_4 - 5j_5 = 6 \cdot (5-1) - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 2.$$

MacPhersonova obesa ima skupno dve prostostni stopnji: pomik v vertikalni smeri in obračanje premnika s kolesom pri zasuku volana. Pri modelu na shemi (slika 1) smo privzeli, da je krmilni drog vpet med dve sferični vezi, kar dopušča rotacijo krmilnega droga okoli lastne vzdolžne osi. Dejansko je funkcija droga vzdrževanje konstantne razdalje med obema točkama vpetja, tako da ima obesa pri konstantnem zasuku volana dejansko le eno prostostno stopnjo. Če nadomestimo sferično vez med krmilnim drogom in šasijo (zobato letvijo) z univerzalno vezjo, ki ima dve prostostni stopnji, dobimo po Grüblerjevi formuli eno prostostno stopnjo obese.

Konstantna dolžina krmilnega droga, v kolikor le-ta ni vzporeden s spodnjo nihajno roko, tudi povzroča t. i. «*bump steer*«. Gre za pojav, ko pri nespremenjenem zasuku volana kolo prevozi oviro in s tem opravi vertikalni pomik, obenem pa pride do zasuka kolesa okoli vertikalne osi, podobno kot v zavoju. Do pojava pride, ker krmilni drog in spodnja nihajna roka običajno nista vzporedna.

V blažilniku, ki je dejansko sestavljen iz dveh teles – cilindra in batnice, smo privzeli translatorno vez. Pri zasuku volana se preko zobate letve premakne krmilni drog, povezan s krmilnim vzvodom na premniku. Sferična vez na batnici in vpetje vzmeti preprečujeta, da bi pri zasuku premnika s kolesom in vzmetne noge prišlo do dodatnega navijanja vzmeti.

Zgled 2: Izračun prostostnih stopenj Stewartove platforme

Stewartova platforma ali heksapod se pogosto uporablja pri zahtevnih obdelovalnih strojih za 3D obdelavo in kot osnova simulatorjev vozil, plovil itd. (slika 2). Glavne prednosti Stewartove platforme so velika odzivnost, trdnost, natančnost, razmeroma enostavna konstrukcija in šest prostostnih stopenj, učinkovit pogon, prilagodljiva velikost, medtem ko je glavna slabost majhno delovno območje.

Pogon je izveden z linearnimi aktuatorji – hidravličnimi cilindri, vijačnim vretenom ipd. Vsak aktuator je na spodnjo in zgornjo ploščo pritrjen z univerzalno vezjo. S spremembo dolžine aktuatorjev spreminjamo lego in orientacijo zgornje platforme. Možna je tudi izvedba z linearnim motorjem/vijačnim vretenom, vendar je treba v tem primeru eno univerzalno vez nadomestiti s sferično vezjo.

Slika 2. Stewartova platforma (levo) [2]; simulator vozil na osnovi Stewartove platforme (desno) [3].

Število teles, skupno 14:

- zgornja platforma,
- spodnja platforma,
- šest linearnih aktuatorjev: batnica + cilinder.

Kinematične vezi:

- šest cilindričnih vezi: batnica/cilinder,
- šest univerzalnih vezi: cilinder/spodnja platforma,
- šest univerzalnih vezi: batnica/zgornja platforma.

Po Grüblerjevi formuli za prostorske sisteme velja:

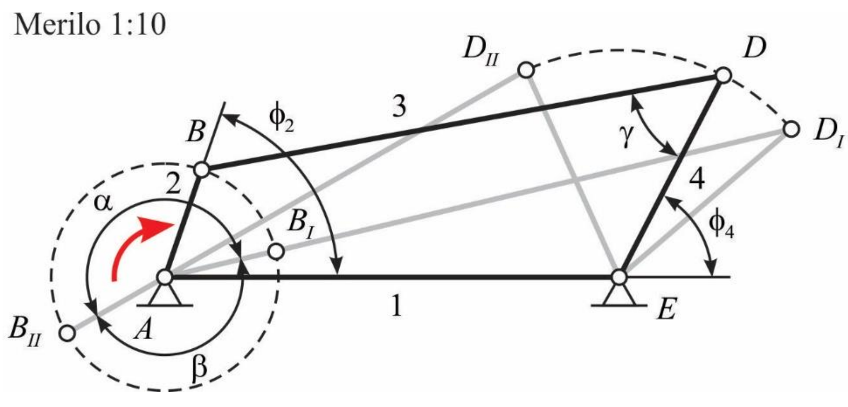
n_b=14, $j_2 = 18$,

$m = 6(n_b - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 4j_4 - 5j_5 = 6 \cdot (14 - 1) - 4 \cdot 18 = 6.$

Zgled 3: Parametri delovanja štirizgibnega mehanizma

Za dani Grashofov mehanizem (slika 3) ugotovite ekstremno vrednost prenosnega kota, delovno območje in razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba. Kotna hitrost pogonske ročice 2 je konstantna. Dolžine ročic so:

$l_1 = 0{,}6$ m
$l_2 = 0{,}15$ m
$l_3 = 0{,}7$ m
$l_4 = 0{,}3$ m

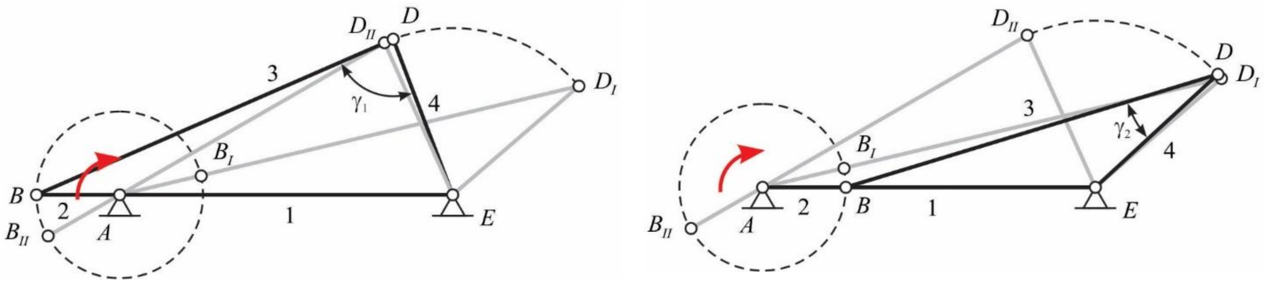


Slika 3. Grashofov štirizgibni mehanizem.

Rešitev

Zaradi izpolnjevanja Grashofovega pogoja lahko ročica 2 opiše polno rotacijo. V kolikor je ročica 2 pogonska, dani mehanizem obratuje kontinuirano. Prenosni kot γ (ostri kot med vezno in gnano ročico) lahko doseže najmanjšo vrednost v eni od dveh leg, ko sta ročici 1 in 2 kolinearni (slika 4).

Pri manjšem prenosnem kotu je manjši tudi moment, ki se z vezne ročice 3 prenaša na gnano ročico 4.



Slika 4. Ekstremni vrednosti prenosnega kota za Grashofov mehanizem.

Ekstremni vrednosti prenosnega kota določimo po kosinusnem izreku za trikotnik *BDE* v kolinearnih legah ročic 1 in 2:

$$\gamma_1 = \arccos\left[\frac{l_3^2 + l_4^2 - (l_1 + l_2)^2}{2l_3 l_4}\right] = \arccos\left[\frac{(0{,}7\text{ m} + (0{,}3\text{ m})^2 - (0{,}6\text{ m} + 0{,}15\text{ m})^2}{2 \cdot 0{,}7\text{ m} \cdot 0{,}3\text{ m}}\right] = 87{,}6°,$$

$$\gamma_2 = \arccos\left[\frac{l_3^2 + l_4^2 - (l_1 - l_2)^2}{2l_3 l_4}\right] = \arccos\left[\frac{(0{,}7\text{ m})^2 + (0{,}3\text{ m})^2 - (0{,}6\text{ m} - 0{,}15\text{ m})^2}{2 \cdot 0{,}7\text{ m} \cdot 0{,}3\text{ m}}\right] = 26°.$$

Delovno območje gnane ročice 4 omejujeta kolinearni legi ročic 2 in 3. To sta obenem tudi legi, kjer delovni gib preide v povratni gib.

Trajanje delovnega in povratnega giba določimo s pomočjo kota pogonske ročice 2 v legah I in II, ko sta pogonska ročica 2 in vezna ročica 3 kolinearni (slika 3), ter kosinusnim izrekom:

$$\phi_{2,I} = \arccos\left[\frac{(l_2 + l_3)^2 + l_1^2 - l_4^2}{2l_1(l_2 + l_3)}\right] = \arccos\left[\frac{(0{,}15\text{ m} + 0{,}7\text{ m})^2 + (0{,}6\text{ m})^2 - (0{,}3\text{ m})^2}{2 \cdot 0{,}6\text{ m} \cdot (0{,}15\text{ m} + 0{,}7\text{ m})}\right] = 13{,}3°,$$

$$\phi_{2,II} = \arccos\left[\frac{(l_3 - l_2)^2 + l_1^2 - l_4^2}{2l_1(l_3 - l_2)}\right] + 180°,$$

$$\phi_{2,II} = \arccos\left[\frac{(0{,}7\text{ m} - 0{,}15\text{ m})^2 + (0{,}6\text{ m})^2 - (0{,}3\text{ m})^2}{2 \cdot 0{,}6\text{ m} \cdot (0{,}7\text{ m} - 0{,}15\text{ m})}\right] + 180° = 209{,}8°.$$

Pri delovnem ciklu, ki je sestavljen iz delovnega in povratnega giba, je običajno zaželeno, da je povratni gib mehanizma čim hitrejši, saj je s tem hitrejši tudi povratek v začetno lego mehanizma in začetek novega delovnega cikla. Zasuk, ki ga pogonska ročica 2 opravi pri delovnem gibu (dlje trajajoči), je

$$\alpha = \phi_{2,II} - \phi_{2,I} = 209{,}8° - 13{,}3° = 196{,}5°,$$

zasuk pri povratnem gibu pa je

$$\beta = 360° - \alpha = 360° - 196{,}5° = 163{,}5°.$$

V kolikor je vrtilna hitrost pogonske ročice 2 konstantna, je razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba enako razmerju med zasukom ročice pri delovnem gibu, α, in zasukom ročice pri povratnem gibu, β:

$$Q = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{196,5°}{163,5°} = 1,20.$$

Če je pogon priključen na nihajno ročico 4, se delovanje mehanizma ustavi, ko se vzpostavi kolinearnost ročic 2 in 3, ne glede na velikost pogonske moči. V tem primeru govorimo o mrtvi legi (slika 5).

Slika 5. Mrtvi legi Grashofovega mehanizma [4].

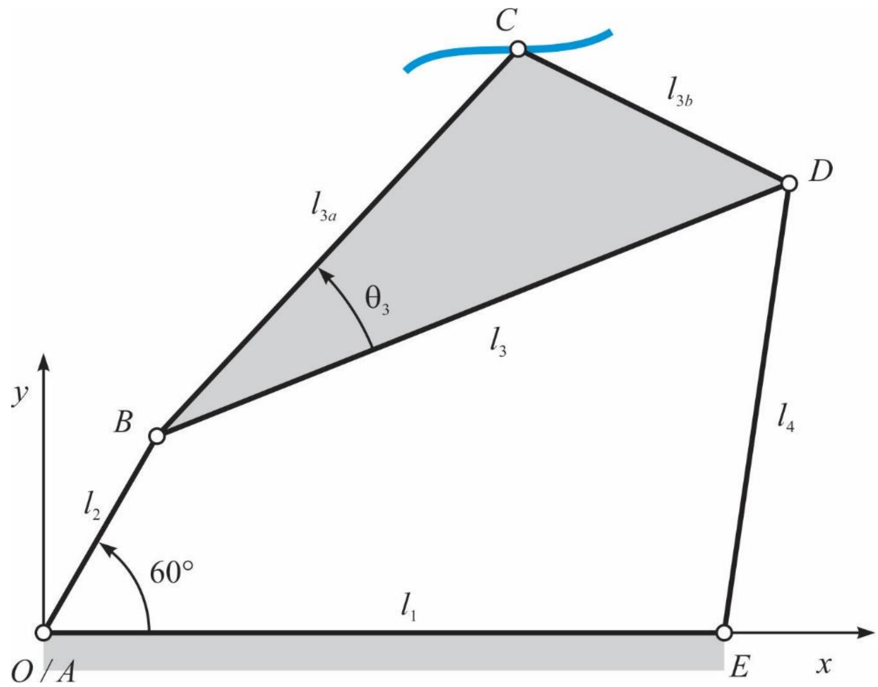
B. Kinematika

Zgled 4: Kinematična analiza s pomočjo poligona hitrosti in poligona pospeškov

S pomočjo poligona hitrosti določite kotne hitrosti ročic za trenutno lego štirizgibnega mehanizma (slika 6). Kotna hitrost pogonske ročice 2 je $\omega_2 = 15$ rad/s v protiurni smeri. Določite hitrost točke C na vezni ročici mehanizma. Določite normalno in tangencialno komponento pospeška točke C na danem mehanizmu.

$l_1 = 0{,}9$ m
$l_2 = 0{,}3$ m
$l_3 = 0{,}9$ m
$l_{3a} = 0{,}7$ m
$l_{3b} = 0{,}4$ m
$l_4 = 0{,}6$ m

Merilo 1:10



Slika 6. Štirizgibni mehanizem.

Rešitev

Z analizo hitrosti lahko ugotovimo hitrost opazovane točke v trenutni legi, ki je vedno usmerjena tangentno na tir gibanja. S pomočjo tangente lahko določimo normalo na tir gibanja in s tem premico, na kateri se nahaja središče krivinskega radija. Tiru gibanja lahko v opazovani točki pridružimo spremljajoči trieder, ki omogoča dekompozicijo pospeška na tangencialno in normalno komponento.

Ročici 2 lahko pridružimo pomični koordinatni sistem $x_2'y_2'$, npr. z izhodiščem O_2', ki je hkrati tudi vpetje A, in podobno za ostale ročice mehanizma (slika 7).

Za vsako ročico v koordinatah pomičnega sistema zapišemo krajevne vektorje opazovanih točk:

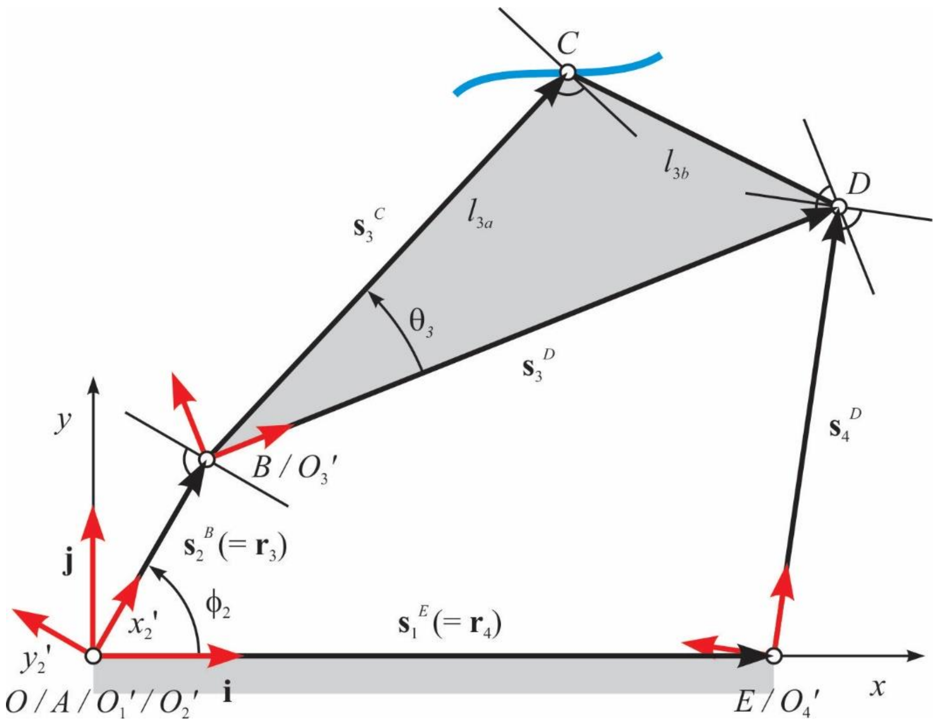
$$\mathbf{s}'^{E}_{1} = [l_1 \quad 0]^T, \mathbf{s}'^{B}_{2} = [l_2 \quad 0]^T, \mathbf{s}'^{D}_{3} = [l_3 \quad 0]^T, \mathbf{s}'^{C}_{3} = [l_{3a}\cos\theta_3 \quad l_{3a}\sin\theta_3]^T, \mathbf{s}'^{D}_{4} = [l_4 \quad 0]^T,$$

ki jih lahko izrazimo tudi v nepomičnem sistemu xy z izhodiščem O, če upoštevamo transformacijsko matriko za vsako ročico, npr. za ročico 2:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_2^B = \mathbf{A}_2 \mathbf{s}'^{B}_{2} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Merilo 1:10



Slika 7. Smeri komponent vektorjev hitrosti za opazovane točke.

Ročica 2 rotira okoli točke A, okoli katere zato kroži druga končna točka B, katere hitrost znaša:

$$\mathbf{v}^B = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{s}_2^B = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^B,$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{v}_2^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{s}_2^B$$

ali v skalarni obliki:

$$v^B = \omega_2 l_2 = 15 \text{ rad/s} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 4{,}5 \text{ m/s},$$

kjer je $\mathbf{v}_2^B$ hitrost točke B glede na izhodišče pomičnega koordinatnega sistema O_2', ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_2$ (v tem primeru ima hitrost nič). Hitrost točke B, $\mathbf{v}^B = \mathbf{v}_2^B$, je usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\mathbf{s}_2^B$. Ročica 3 je povezana z ročico 2 z rotacijsko vezjo v točki B, torej ročica 3 in z njo točka D krožita okoli B, kjer je tudi izhodišče pomičnega koordinatnega sistema ročice 3, O_3'. Relativna hitrost $\mathbf{v}_3^D$ točke D glede na B oz. O_3' bo zato usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\mathbf{s}_3^D$. Obenem je hitrost $\mathbf{v}^D$ točke D enaka tangencialni hitrosti zaradi kroženja ročice 4 okoli fiksne točke E, kjer je izhodišče pomičnega koordinatnega sistema ročice 4, O_4':

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_4 + \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{s}_4^D = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_4^D,$$

kjer je $\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, hkrati pa velja:

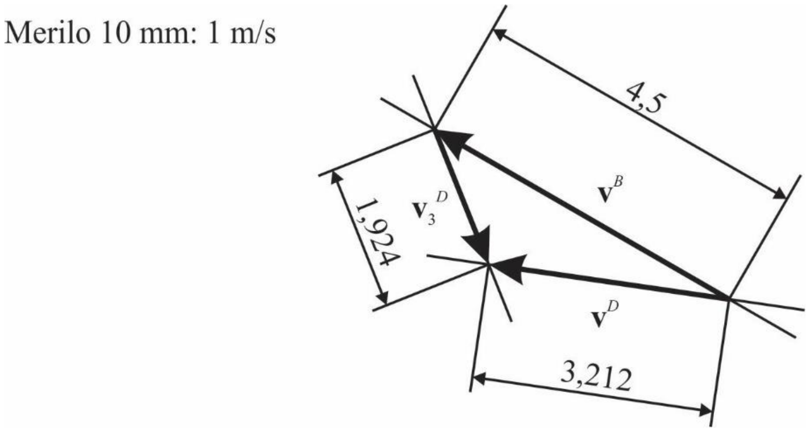
$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^D = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3^D.$$

Ker je iz predhodnega koraka reševanja znana smer in velikost vektorja hitrosti:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}^B$$

in poznamo smeri vektorjev hitrosti $\mathbf{v}_3^D$ in $\mathbf{v}^D$, lahko njuni velikosti določimo tako, da zapišemo oz. grafično sestavimo poligon hitrosti, v katerega v ustreznem merilu prenesemo smer in velikost $\mathbf{v}^B$ ter upoštevamo smer $\mathbf{v}_3^D$ in smer $\mathbf{v}^D$ (slika 8):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}^B + \mathbf{v}_3^D.$$



Slika 8. Poligon hitrosti za točko *D.*

Iz poligona hitrosti za točko D grafično dobimo:

$$v_3^D = 1{,}924 \text{ m/s},$$

$$v^D = 3{,}212 \text{ m/s},$$

iz česar lahko izračunamo kotni hitrosti ročic 3 in 4:

$$\omega_3 = \frac{v_3^D}{l_3} = \frac{1{,}924 \text{ m/s}}{0{,}9 \text{ m}} = 2{,}13 \text{ rad/s},$$

$$\omega_4 = \frac{v^D}{l_4} = \frac{3{,}212 \text{ m/s}}{0{,}6 \text{ m}} = 5{,}35 \text{ rad/s},$$

Iz smeri vektorja $\mathbf{v}_3^D$ je razvidno, da ročica 3 rotira v sourni smeri.

Hitrost točke C je vsota hitrosti točke B in tangencialne hitrosti zaradi kroženja ročice 3, ki je pravokotna na krajevni vektor $\mathbf{s}_3^C$ (slika 9):

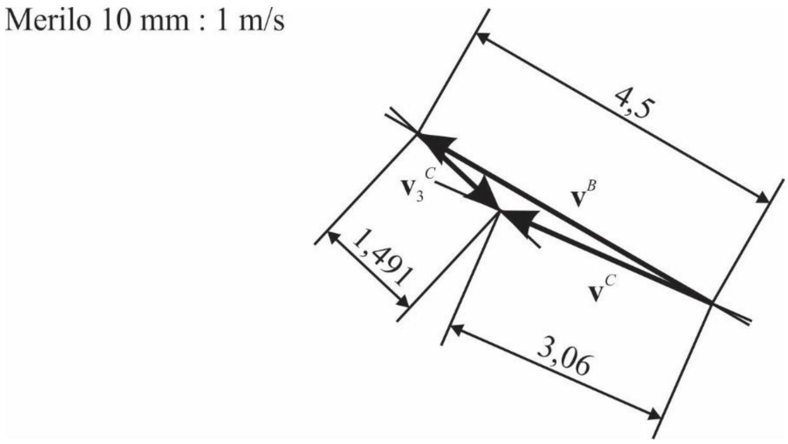
$$\mathbf{v}^C = \mathbf{v}^B + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^C = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3^C.$$

Velikost tangencialne hitrosti je:

$$v_3^C = \omega_3 l_{3a} = 2{,}13 \text{ rad/s} \cdot 0{,}7\text{m} = 1{,}491 \text{ m/s},$$

iz poligona hitrosti za točko C tako dobimo:

$$v^C = 3{,}06 \text{ m/s}.$$



Slika 9. Poligon hitrosti za točko *C.*

Iz opravljene analize hitrosti za dano lego je možno direktno določiti razmerje momentov za ročici 2 in 4. Prav tako je predhodno opravljena analiza leg in hitrosti potrebna za analizo pospeškov opazovanih točk mehanizma.

Z analizo pospeškov določimo pospešek opazovane točke. Pri tem praviloma izhajamo iz poligona pospeškov, ki ga sestavljajo vektorji relativnega pospeška, komponente zaradi kotnega pospeška in komponente zaradi kotne hitrosti ročice z opazovano točko. Tako določeni pospešek opazovane točke razstavimo s pomočjo spremljajočega triedra na tangencialno in normalno komponento. Slednja nam omogoča določitev krivinskega radija tira gibanja opazovane točke.

Pri analizi pospeškov izhajamo iz dekompozicije na normalno in tangencialno komponento:

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n},$$

s katero lahko določamo hitrosti točk na mehanizmu, medtem ko lahko iz enačbe

$$\mathbf{a}^P = \mathbf{a} + \mathbf{a}_{rel}^P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}^P + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{s}}^P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}^P)$$

izrazimo kotni pospešek ročic. Zgornja enačba se za togo telo, na katerem je opazovana točka P fiksne lege, poenostavi tako, da odpade relativni pospešek $\mathbf{a}_{rel}^P$ in Coriolisov pospešek $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{s}}^P$, ostanejo le pospešek ročice $\mathbf{a}$, tangencialna komponenta $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}^P$ in normalna komponenta $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}^P)$:

$$\mathbf{a}^P = \mathbf{a} + +\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}^P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}^P)$$

ali

$$\mathbf{a}^P = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}^P - \omega^2\mathbf{s}^P.$$

Za dani zgled je vektor pospeška končne točke B na ročici 2 enak:

$$\mathbf{a}^B = \mathbf{a}_2 + a_{t,2}^B\mathbf{t}_2^B + a_{n,2}^B\mathbf{n}_2^B.$$

Ročica je toga, oddaljenost opazovane točke B od izhodišča $O_2{}'$ je konstantna, zato sta relativna $\mathbf{a}_{rel,2}^B$ in Coriolisova komponenta $2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{s}}_2^B$ enaki nič. Lega izhodišča pomičnega koordinatnega sistema $O_2{}'$ ročice 2 je fiksna in sovpada z izhodiščem nepomičnega koordinatnega sistema O, zato je pospešek pomičnega koordinatnega sistema $\mathbf{a}_2$ enak nič. Na desni strani enačbe ostaneta tangencialna $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{s}_2^B$ in normalna komponenta $\boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{s}_2^B)$. V ravnini se zapis velikosti komponent pospeškov poenostavi.

Ker je kotna hitrost ročice 2 konstantna, $\omega_2 = 15$ rad/s, je njen kotni pospešek enak nič, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, prav tako velikost tangencialne komponente pospeška:

$$a_{t,2}^B = \alpha_2 l_2 = 0.$$

Velikost normalne komponente je:

$$a_{n,2}^B = \frac{(v_2^B)^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2 = (15\ \mathrm{rad/s})^2 \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} = 67{,}5\ \mathrm{m/s}^2,$$

smer normalne komponente kaže proti središču radija kroženja.

Vektor pospeška v točki D na ročici 4 je enak vsoti:

$$\mathbf{a}^D = \mathbf{a}_4 + a_{t,4}^D \mathbf{t}_4^D + a_{n,4}^D \mathbf{n}_4^D,$$

kjer je velikost normalne komponente:

$$a_{n,4}^D = \omega_4^2 l_4 = (5{,}35\ \mathrm{rad/s})^2 \cdot 0{,}6\ \mathrm{m} = 17{,}17\ \mathrm{m/s}^2,$$

Vektor pospeška izhodišča ročice 4, $\mathbf{a}_4$, je enak nič, velikost tangencialne komponente $a_{t,4}^D$ pa dobimo pozneje s pomočjo poligona pospeškov.

Vektor pospeška končne točke D na ročici 3 je tudi vsota pospeška $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^B$ izhodišča pomičnega koordinatnega sistema ročice 3, $O_3{}'$ oz. točka B, ter tangencialne $\boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{s}_3^D$ in normalne komponente $\boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^D)$ za točko D:

$$\mathbf{a}^D = \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{s}_3^D + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^D),$$

kjer lahko izračunamo velikost normalne komponente:

$$a_{n,3}^D = \omega_3^2 l_3 = (2{,}13\ \mathrm{rad/s})^2 \cdot 0{,}9\ \mathrm{m} = 4{,}083\ \mathrm{m/s}^2.$$

Ker sta ročici 3 in 4 povezani v točki D, lahko vektor pospeška točke D zapišemo hkrati z upoštevanjem gibanja ročic 3 in 4:

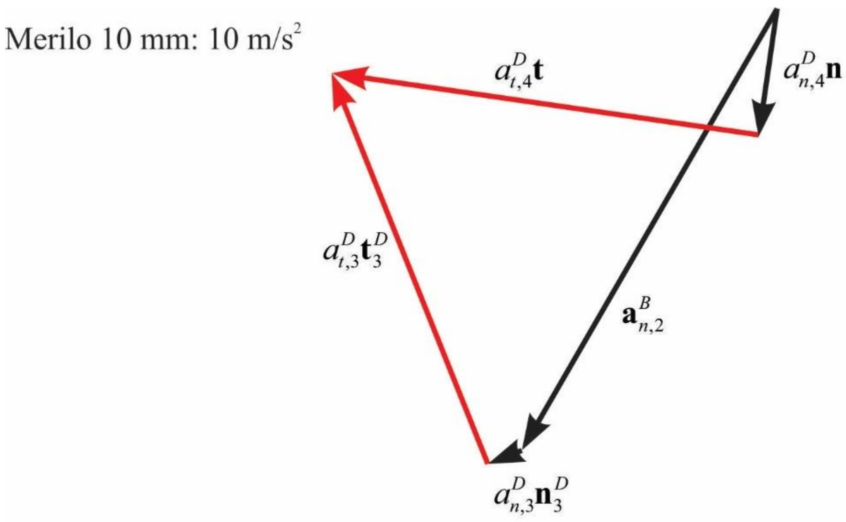
$$\mathbf{a}^D = a_{t,4}^D \mathbf{t}_4^D + a_{n,4}^D \mathbf{n}_4^D = \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{s}_3^D + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^D),$$

$$a_{t,4}^D \mathbf{t}_4^D + a_{n,4}^D \mathbf{n}_4^D = \mathbf{a}_3 + a_{t,3}^D \mathbf{t}_3^D + a_{n,3}^D \mathbf{n}_3^D.$$

Obenem velja, da je vektor pospeška izhodišča pomičnega koordinatnega sistema ročice 3:

$$\mathbf{a}_3 = a_{n,2}^B \mathbf{n}_2^B.$$

Neznani sta ostali še velikosti kotnih pospeškov ročic 3 in 4, α_3 in α_4, in velikosti tangencialnih komponent $a_{t,3}^D$ in $a_{t,4}^D$. Narišemo poligon pospeškov za točko D (slika 10), kjer upoštevamo velikosti in smeri vektorjev znanih pospeškov ter znani smeri tangencialnih komponent, iz katerih nato izračunamo velikosti kotnih pospeškov α_3 in α_4.



Slika 10. Poligon pospeškov za točko *D.*

Normalni pospešek vedno kaže v smeri središča radija kroženja. Iz poligona pospeškov Dobimo naslednja odčitka za velikosti tangencialnih komponent:

$$a_{t,3}^{D} = 55{,}69\ \mathrm{m/s^2},$$

$$a_{t,4}^{D} = 57{,}07\ \mathrm{m/s^2},$$

iz katerih lahko izračunamo kotna pospeška

$$\alpha_3 = \frac{a_{t,3}^{D}}{l_3} = \frac{55{,}69\ \mathrm{m/s^2}}{0{,}9\ \mathrm{m}} = 61{,}9\ \mathrm{rad/s^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{a_{t,4}^{D}}{l_4} = \frac{57{,}07\ \mathrm{m/s^2}}{0{,}6\ \mathrm{m}} = 95{,}1\ \mathrm{rad/s^2}.$$

Sedaj lahko določimo še vektor pospeška točke C:

$$\mathbf{a}^{C} = \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{s}_3^{C} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \left(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{s}_3^{C}\right),$$

$$\mathbf{a}^{C} = \mathbf{a}_3 + \mathrm{a}_{t,3}^{C}\mathbf{t}_3^{C} + \mathrm{a}_{n,3}^{C}\mathbf{n}_3^{C},$$

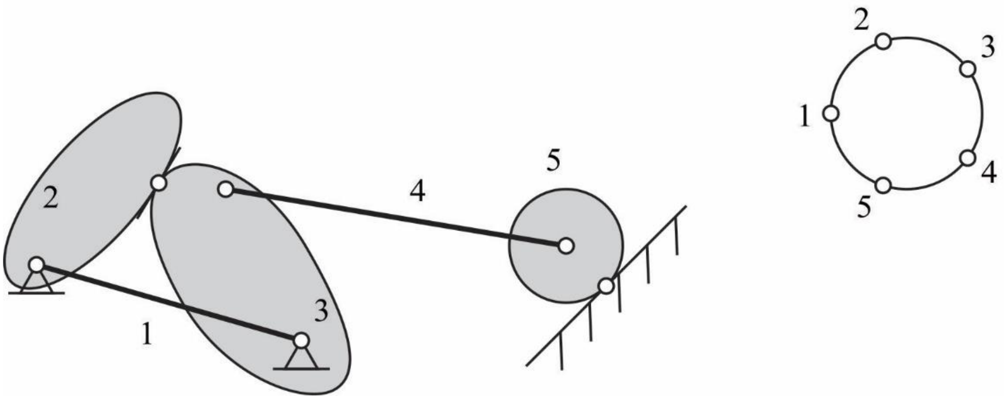
kjer sta velikosti tangencialne in normalne komponente:

$$a_{t,3}^{C} = \alpha_3 l_{3a} = 61{,}9\ \mathrm{rad/s} \cdot 0{,}7\ \mathrm{m} = 43{,}32\ \mathrm{m/s^2},$$

$$a_{n,3}^{C} = \omega_3^2 l_{3a} = (2{,}13\ \mathrm{rad/s})^2 \cdot 0{,}7\ \mathrm{m} = 3{,}18\ \mathrm{m/s^2}.$$

Zgled 5: Določanje polov hitrosti za sistem teles

Določite pole hitrosti za dani sistem teles (slika 11). Med telesoma 2 in 3 je možen kontakt s kotaljenjem in zdrsom, medtem ko se telo 5 lahko le kotali po nepomičnem telesu 1.



Slika 11. Sistem medsebojno povezanih teles.

Rešitev

Pol hitrosti je točka v ravnini, P_{ij}, skupna dvema telesoma i in j, v kateri je hitrost obeh teles enaka po smeri in po velikosti. Lega polov se z gibanjem teles v splošnem spreminja. Za ravninski sistem teles z n_b medsebojno povezanimi telesi je skupno število polov, n_P, v splošnem enako številu kombinacij med telesi:

$$n_P = \frac{n_b(n_b - 1)}{2}.$$

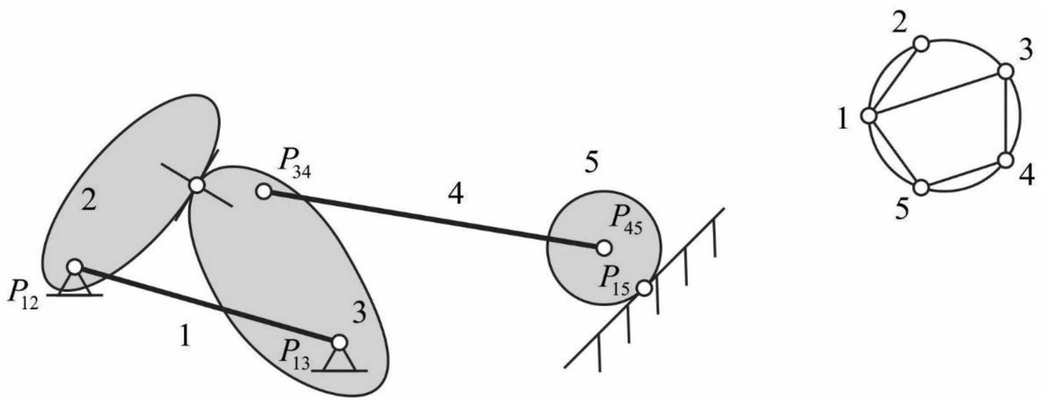
V danem primeru s pet telesi, $n_b = 5$, je število polov:

$$n_P = \frac{n_b(n_b - 1)}{2} = n_P = \frac{5 \cdot (5 - 1)}{2} = 10.$$

K večji preglednosti pri iskanju polov, katerih število hitro narašča s številom teles, lahko pripomore dodatni grafični pripomoček, in sicer krožec z oštevilčenimi točkami – vozlišči, po eno za vsako telo (slika 11 desno zgoraj). V nadaljevanju s povezavo med dvema vozliščema zabeležimo pol hitrosti skupen vsakemu paru teles, pri čemer je število možnih povezav med vozlišči enako številu polov med telesi, n_P.

Najprej določimo primarne pole – rotacijske in translatorne vezi; locirane pole sproti dopolnjujemo v pomožni krožec kot povezave med vozlišči – telesi(slika 12). V primeru, da par teles povezuje rotacijska vez, lega pola sovpada s trenutno lego rotacijske vezi, če par teles povezuje translatorna vez (npr. drsnik v linearnem vodilu), pa leži pol neskončno oddaljen na normali na smer gibanja, ki jo omogoča translatorna vez.

Ostale – sekundarne pole določamo s pomočjo Kennedy-Aronholdovega teorema, po katerem vsi trije poli, P_{ij}, P_{jk} in P_{ik}, ki so skupni trem telesom i, j in k, ležijo na isti premici. Če poznamo lego polov P_{ij} in P_{jk}, preostali pol P_{ik} leži na premici, ki poteka skozi pola $P_{ij}P_{jk}$.



Slika 12. Primarni poli hitrosti za dani sistem teles.

Pri določanju pola P_{23} lahko privzamemo, da v trenutni kontaktni točki med telesoma 2 in 3 pride do medsebojnega pomika vzdolž kontaktnih površin obeh teles. Zato se v trenutni legi telesi 2 in 3 gibljeta, kot da bi bili povezani z drsnikom oz. translatorno vezjo v smeri tangentne premice skozi kontaktno točko na površini obeh teles. V skladu s Kennedy-Arnoholdovim teoremom pol P_{23} leži na presečišču premic $P_{12}P_{13}$ in normale na površino teles 2 in 3 v trenutni kontaktni točki med telesoma (slika 13):

P_{23}: $P_{12}P_{13}$ – normala.

Z uporabo Kennedy-Aronholdovega teorema lociramo tudi sekundarne pole (Slika 13). P_{35} leži na presečišču premic $P_{34}P_{45}$ in $P_{13}P_{15}$. Pol P_{14} leži na presečišču premic $P_{13}P_{34}$ in $P_{15}P_{45}$. Pol P_{24} leži na presečišču premic $P_{12}P_{14}$ in $P_{23}P_{34}$. Pol P_{25} leži na presečišču premic $P_{12}P_{15}$ in $P_{23}P_{35}$ (ali tudi premic $P_{12}P_{15}$ in $P_{24}P_{45}$):

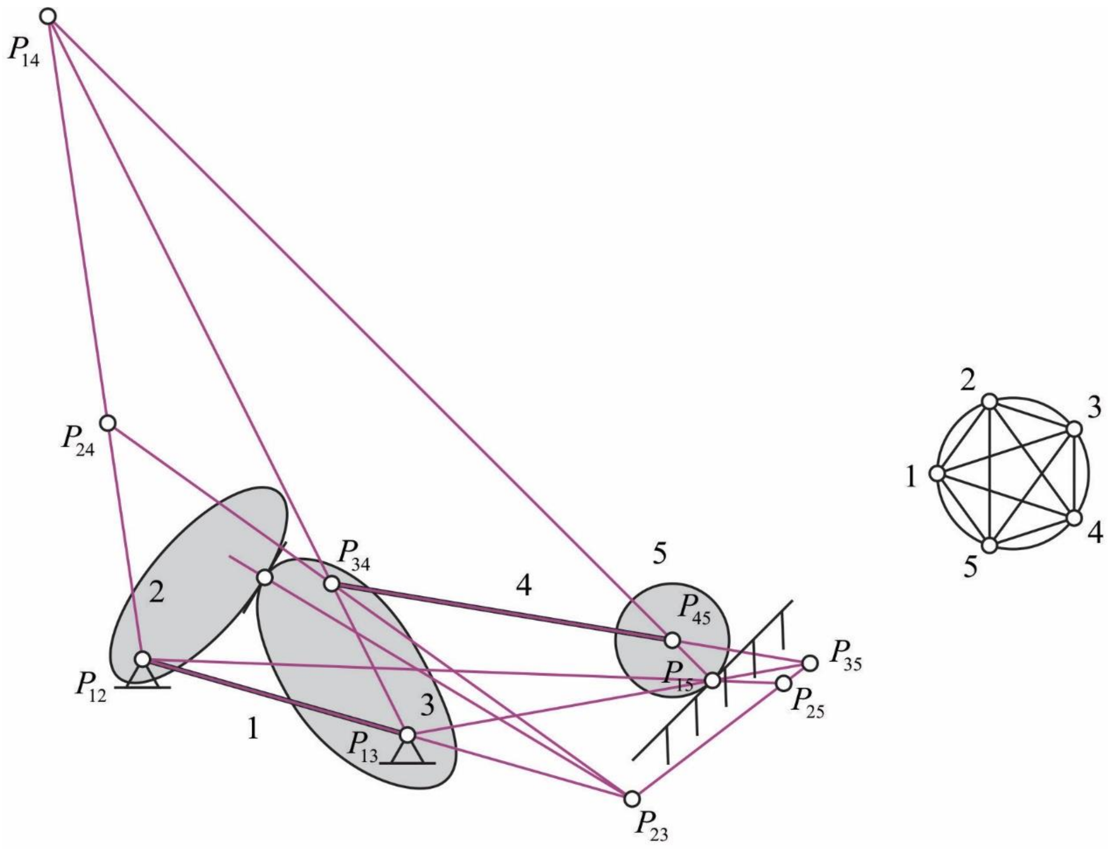
P_{35}: $P_{34}P_{45} - P_{13}P_{15}$,

P_{14}: $P_{13}P_{34} - P_{15}P_{45}$,

P_{24}: $P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34}$,

P_{25}: $P_{12}P_{15} - P_{23}P_{35}$.

V pomoč je lahko naslednje opažanje. Vsak pol ima dva indeksa, ki pripadata telesoma, katerima je pol skupen in s tem označuje kombinacijo teles. Trojica teles ima tri pole, posledično tri kombinacije in tri indekse. Ko povezujemo po dva že znana pola, opazimo, da se en indeks ponovi, npr. pri premici $P_{34}P_{45}$ se ponovi indeks 4, manjka pa kombinacija indeksov 35. To pomeni, da bomo na tej premici ugotavljali lego pola P_{35}. Manjkajočo kombinacijo indeksov 35 lahko opazimo tudi pri premici $P_{13}P_{15}$, zato bo pol P_{35} ležal hkrati tudi na tej premici, torej na presečišču premic $P_{34}P_{45}$ in $P_{13}P_{15}$. V pomožnem krogu se to opazi po vzorcu, ki ga linije izrisujejo. Povezavi 34 in 45 ter 13 in 15 tvorijo karo vzorec, pri katerem diagonalna povezava nasprotnih vozlišč 3 in 5 predstavlja manjkajoči pol P_{35}. Za določitev le-tega torej najprej rabimo omenjeni karo vzorec oz. pole, ki predstavljajo povezave v karo vzorcu. Znani štirje poli zadostujejo, da določimo še drugo diagonalno povezavo oz. pol P_{14}, in sicer s presečiščem premic $P_{13}P_{34}$ in $P_{15}P_{45}$.

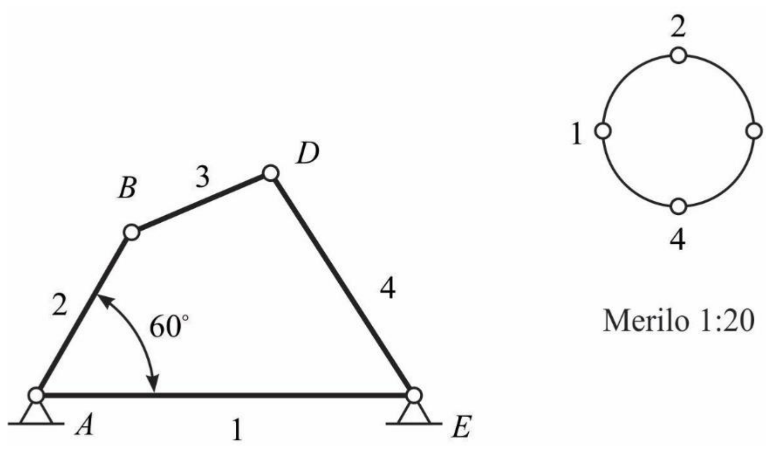


Slika 13. Vsi trenutni poli hitrosti za dani sistem teles.

Zgled 6: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti

Za štirizgibni mehanizem v dani legi (slika 14) določite trenutne pole hitrosti. Kolikšna je hitrost točke D, če se ročica 2 vrti v sourni smeri s konstantno kotno hitrostjo $\omega_2 = 2$ rad/s? Določite tudi razmerje momentov za ročici 2 in 4.

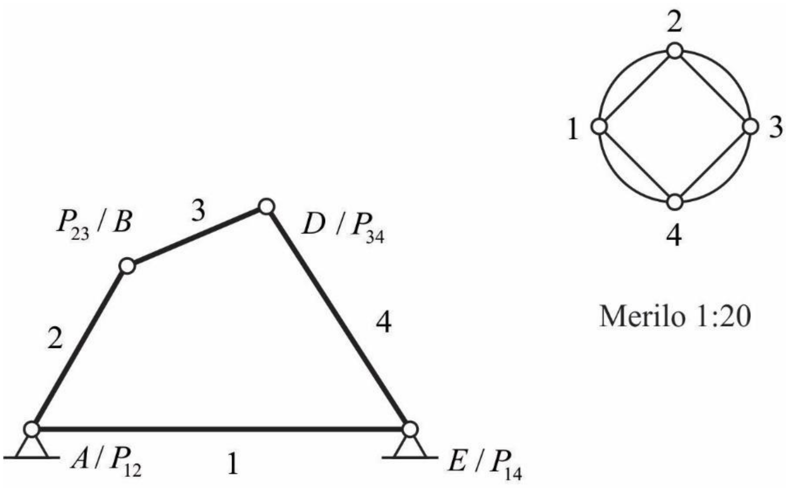
$l_1 = 1$ m
$l_2 = 0{,}5$ m
$l_3 = 0{,}4$ m
$l_4 = 0{,}7$ m



Slika 14. Štirizgibni mehanizem.

Rešitev

Za štirizgibni mehanizem je možno določiti skupno šest polov hitrosti, kolikor je različnih parov ročic. Primarni poli so enostavno določljivi, saj se nahajajo v točkah A, B, D, in E, kjer so ročice paroma povezane z rotacijskimi vezmi in je vektor hitrosti obeh ročic v paru enak po smeri in po velikosti: P_{12}, P_{23}, P_{14}, P_{34}, kar označimo tudi s povezavami med vozlišči – ročicami v pomožnem krožcu (slika 15).

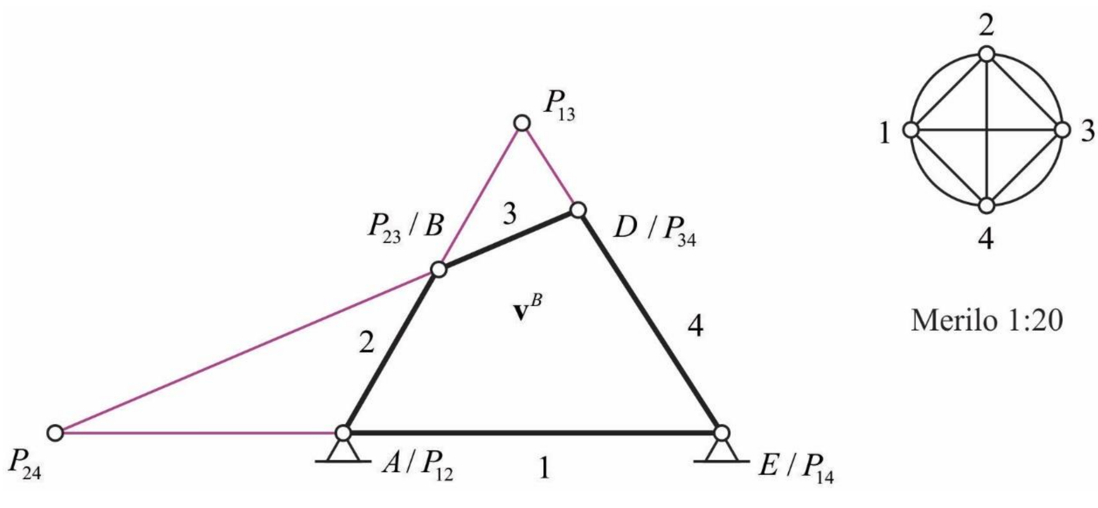


Slika 15. Primarni poli štirizgibnega mehanizma.

Preostala – sekundarna pola določimo po Kennedy-Aronholdovem teoremu. Pol P_{13} leži na hkrati na premici $P_{12}P_{23}$ in na premici $P_{14}P_{34}$, ki potekata skozi predhodno določena pole, torej na njunem presečišču, pol P_{24} pa leži na presečišču premic $P_{12}P_{14}$ in $P_{23}P_{34}$, kar vnesemo kot dodatni povezavi tudi v pomožni krožec (slika 16):

P_{13}: $P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34}$,

P_{24}: $P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34}$.



Slika 16. Vsi trenutni poli štirizgibnega mehanizma.

Pri analizi hitrosti izhajamo iz polov hitrosti in zapišemo hitrosti ročic pri kroženju okoli pripadajočega pola hitrosti. Ročica 2 kroži okoli pola P_{12}, ki je skupen ročicama 1 in 2, zato ima končna točka B na ročici 2, kjer se nahaja tudi pol P_{23}, hitrost:

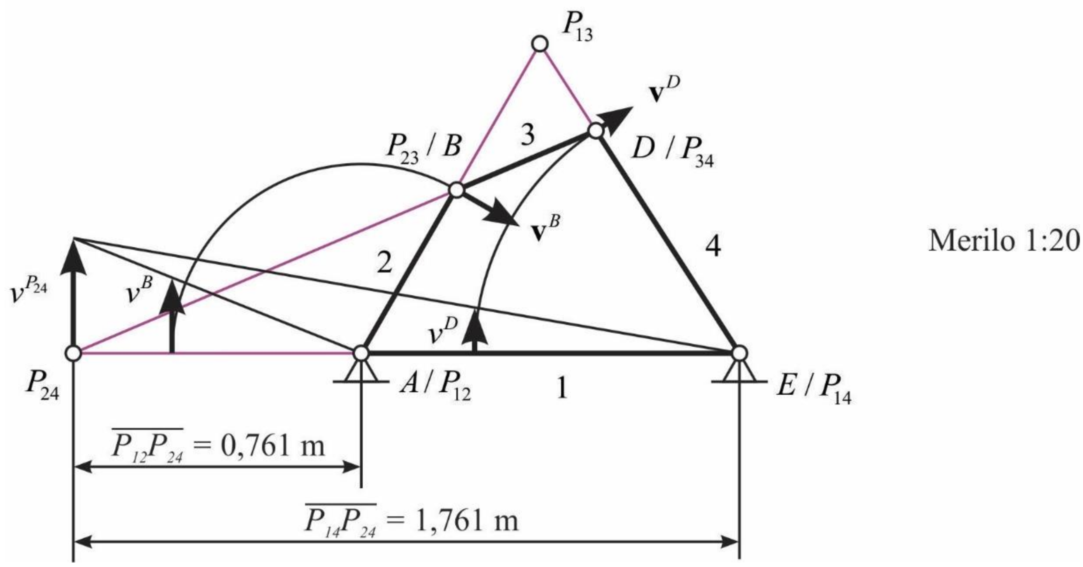
$$v^B = v^{P_{23}} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{23}} = \omega_2 l_2 = 2\ \mathrm{rad/s} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m/s}.$$

Hkrati velja, da je hitrost ročice 4 enaka hitrosti ročice 2 v točki, kjer se v trenutni legi mehanizma nahaja pol hitrosti P_{24}. V polu P_{24} je hitrost ročice 2 sorazmerna oddaljenosti P_{24} od vrtišča v točki A, kjer se nahaja pol P_{12}, hitrost ročice 4 pa je sorazmerna oddaljenosti P_{24} od vrtišča v točki B, kjer se nahaja pol P_{14} (slika 17), zato lahko zapišemo:

$$v^{P_{24}} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{24}} = \omega_4 \overline{P_{14}P_{24}},$$

iz česar dobimo kotno hitrost ročice 4:

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{\overline{P_{12}P_{24}}}{\overline{P_{14}P_{24}}} = 2\ \mathrm{rad/s} \cdot \frac{0{,}761\ \mathrm{m}}{1{,}761\ \mathrm{m}} = 0{,}86\ \mathrm{rad/s}.$$



Slika 17. Analiza hitrosti ročic s pomočjo trenutnih polov hitrosti.

Hitrost točke D na ročici 4, katere smer vrtenja je sourna, je sorazmerna oddaljenosti točke od vrtišča ročice:

$$v^D = v^{P_{34}} = \omega_4 \overline{P_{14}P_{34}} = \omega_4 l_4 = 0{,}86\ \mathrm{rad/s} \cdot 0{,}7\ \mathrm{m} = 0{,}605\ \mathrm{m/s}.$$

Pri izračunu razmerja momentov v dani legi mehanizma zanemarimo izgube v vezeh mehanizma in privzamemo, da se moč pogona na ročici 2 v celoti prenese preko vezne ročice 3 na gnano ročico 4, pri čemer upoštevamo predhodno določeni kotni hitrosti ročic 2 in 4:

$$M_2 \omega_2 = M_4 \omega_4,$$

in dobimo razmerje momentov:

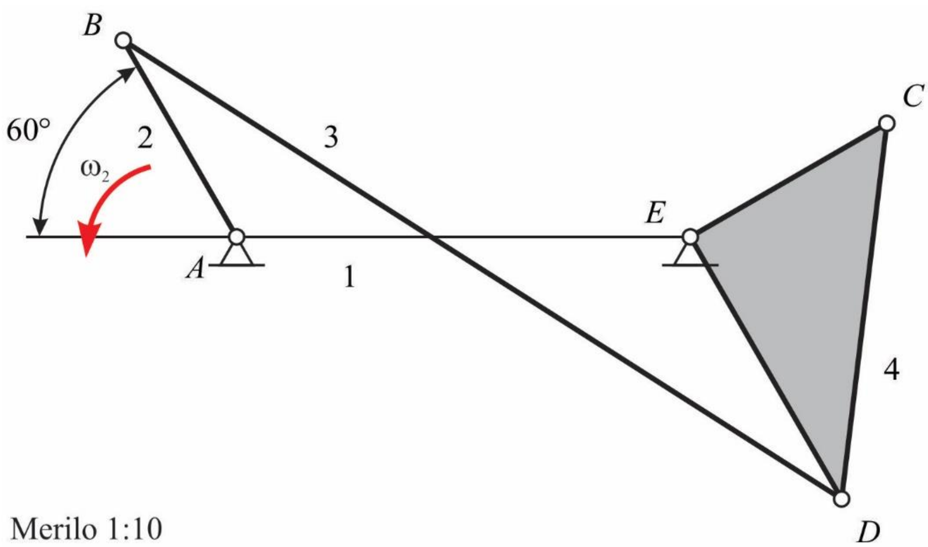
$$\frac{M_4}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{2\ \mathrm{rad/s}}{0{,}86\ \mathrm{rad/s}} = 2{,}33,$$

kar pomeni, da je moment M_4 na gnani ročici 4 v dani legi mehanizma 2,33-krat večji od momenta M_2, ki deluje na ročico 2 za pogon mehanizma.

Zgled 7: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti.

Za štirizgibni mehanizem v dani legi (slika 18) določite hitrost točke C na ročici 4. Določite tudi prenosni kot in prenosno razmerje. Pogonska ročica 2 ima kotno hitrost $\omega_2 = 10$ rad/s v protiurni smeri.

$l_1 = 1{,}2$ m
$l_2 = 0{,}3$ m
$l_3 = 1{,}127$ m
$l_4 = 0{,}3$ m
$\overline{EC} = 0{,}3$ m



Slika 18. Dana lega štirizgibnega mehanizma.

Rešitev

Za trenutno lego mehanizma določimo pole hitrosti (slika 19). Štirje primarni poli se nahajajo v rotacijskih vezeh, preostala – sekundarna pola pa določimo po Kennedy-Aronholdovem teoremu:

$$P_{13}:\quad P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34},$$

$$P_{24}:\quad P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34}.$$

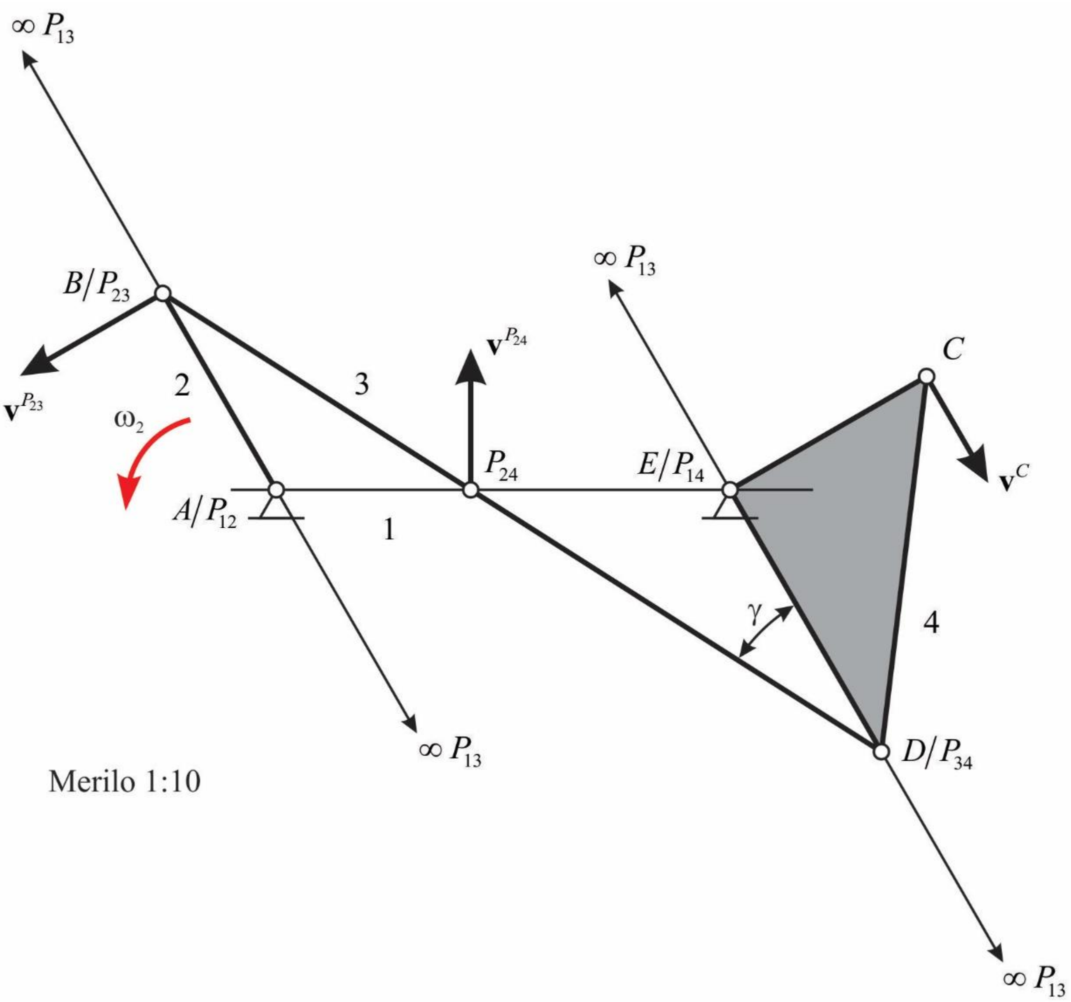
Točka B oz. pol P_{23}, kjer sta povezani ročici 2 in 3, kroži okoli točke A oz. pola P_{12}, kjer se nahaja vpetje ročice 2. Hkrati točka B kroži okoli P_{13}, ki pa v trenutni legi mehanizma leži v neskončnosti in je razdalja $\overline{P_{13}P_{23}} \to \infty$. Ker sta v polu P_{23} hitrosti ročic 2 in 3 enaki, ročica 2 pa kroži s kotno hitrostjo ω_2, sledi, da je kotna hitrost ročice 3, ω_3, enaka nič:

$$v^{P_{23}} = \omega_2\overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3\overline{P_{13}P_{23}}, \qquad \omega_3 = \omega_2\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 0.$$

Enaka relacija velja za hitrost ročic 2 in 4 v polu P_{24}, iz česar ob upoštevanju grafično določenih razdalj med poli dobimo kotno hitrost ročice 4:

$$v^{P_{24}} = \omega_2\overline{P_{12}P_{24}} = \omega_4\overline{P_{14}P_{24}},$$

$$\omega_4 = \omega_2\frac{\overline{P_{12}P_{24}}}{\overline{P_{14}P_{24}}} = 10\ \text{rad/s}\cdot\frac{0{,}257\ \text{m}}{0{,}343\ \text{m}} = 7{,}49\ \text{rad/s}.$$



Slika 19. Uporaba polov za analizo hitrosti za dano lego štirizgibnega mehanizma.

Za hitrost točke C na ročici 4 velja, da je sorazmerna kotni hitrosti ω_4 in oddaljenosti od vpetja ročice 4 – pola P_{14}:

$$v^C = \omega_4 \overline{P_{14}C} = 7{,}49 \text{ rad/s} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 2{,}248 \text{ m/s}.$$

Prenosni kot je po definiciji ostri kot med vezno in gnano ročico, 3 in 4, ter v zgornjem primeru v dani legi znaša $\gamma = 27{,}5°$, določen grafično.

Razmerje kotnih hitrosti za ročici 2 in 4 določa prenosno razmerje oz. razmerje momentov za dano lego mehanizma:

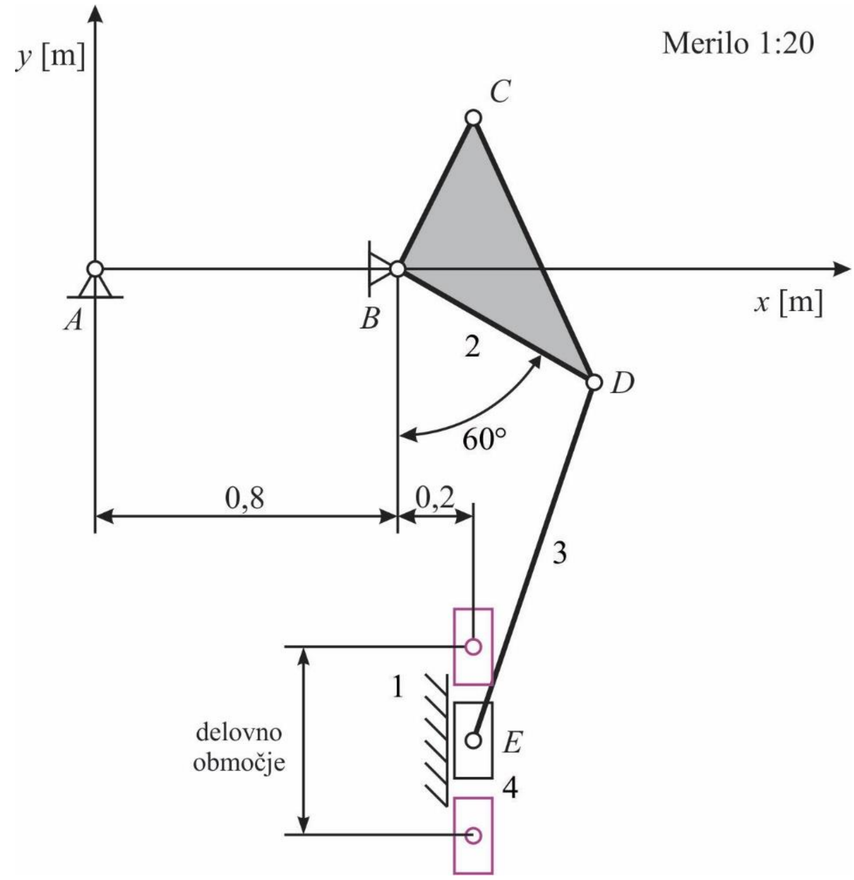
$$\frac{M_{\text{izh}}}{M_{\text{vh}}} = \frac{\omega_{\text{vh}}}{\omega_{\text{izh}}}, \qquad \frac{M_4}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{10 \text{ rad/s}}{7{,}49 \text{ rad/s}} = 1{,}33.$$

Zgled 8: Sinteza in kinematična analiza štirizgibnega mehanizma

Drsnik 4 ročičnega mehanizma se giblje na predpisanem delovnem območju dolžine 0,5 m (slika 20). Za pogon ročice 2 je predviden dodaten štirizgibni mehanizem (zaenkrat manjkajoč), katerega pogonska ročica naj bi opravljala popolno rotacijo okoli vpetja A s konstantno kotno hitrostjo 10 rad/s v sourni smeri in preko vezne ročice prenašala gibanje do točke C na ročici 3 ročičnega mehanizma.

Določite dolžino pogonske in vezne ročice dodatnega štirizgibnega mehanizma za pogon ročice 2. S pomočjo polov hitrosti za trenutno lego določite hitrost drsnika 4. Kakšno je razmerje med trajanjem delovnega giba, pri katerem se drsnik pomika navzdol, in trajanjem povratnega giba? Kakšno je v trenutni legi razmerje momentov za pogonski štirizgibni mehanizem?

$\overline{BD} = 0{,}6$ m
$\overline{DE} = 1$ m
$\overline{BC} = 0{,}447$ m
$\overline{CD} = 0{,}77$ m



Slika 20. Delovno območje ročičnega mehanizma z drsnikom, brez pogonskega podsklopa.

Rešitev

V začetnem koraku dodamo pogonski mehanizem, in sicer pogonsko ročico 5 med točkama AF in vezno ročico 6 med točkama FC (slika 21). Pogonska ročica 5, vezna ročica 6 in nihajoča ročica 2 skupaj z nepomično ročico 1 tvorijo štirizgibni mehanizem $AFCB$, ki mora izpolnjevati Grashofov pogoj, tako da je možno kontinuirano obratovanje. Nihajoče gibanje ročice 2 ročičnega mehanizma se dalje prenaša preko vezne ročice 3 na drsnik 4.

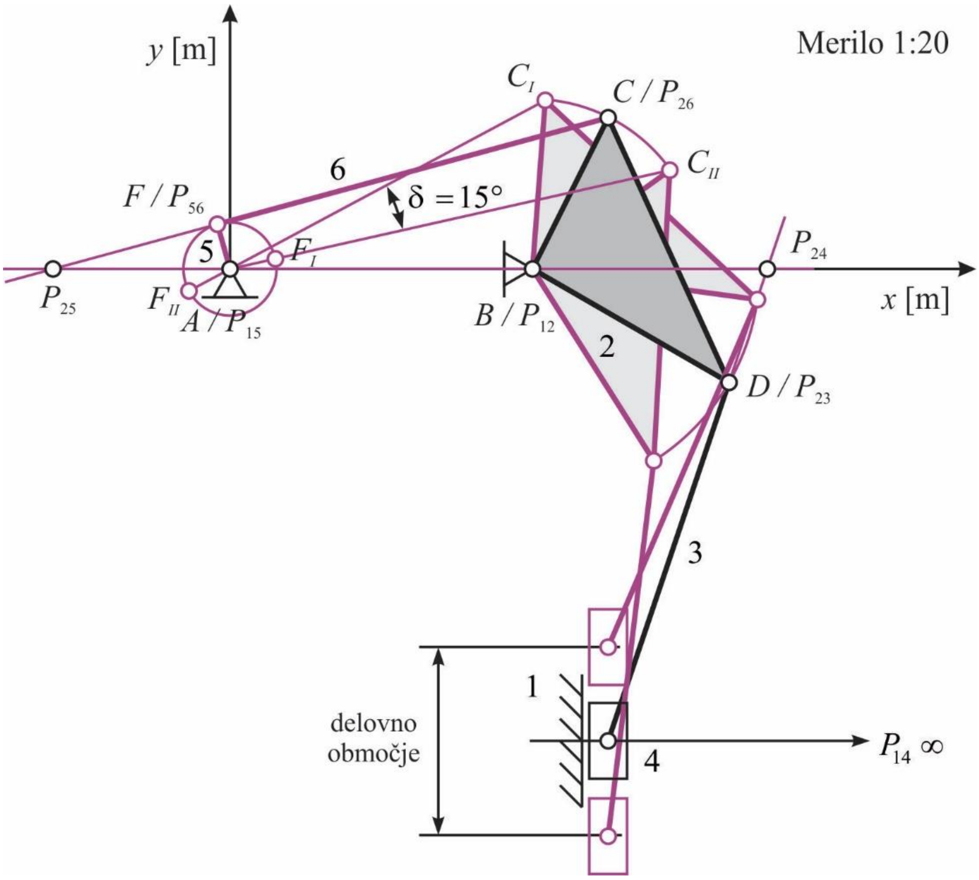
Glede na dano delovno območje drsnika 4 določimo skrajni legi I in II pri zasuku ročice 2, v katerih nastopita kolinearni legi ročic 5 in 6. V skrajni legi I sta ročici popolnoma iztegnjeni in za razdalje med točkami, ki jih lahko odmerimo s slike v merilu, velja:

$$\overline{AF_I} + \overline{F_IC_I} = \overline{AC_I} = l_5 + l_6 = 1{,}194 \text{ m},$$

v skrajni legi II pa se ročici 5 in 6 delno prekrijeta in velja:

$$\overline{F_{II}C_{II}} - \overline{AF_{II}} = \overline{AC_{II}} = l_6 - l_5 = 0{,}948\ \mathrm{m}.$$

S hkratno rešitvijo zgornjih enačb dobimo za dolžino pogonske ročice 5 vrednost $l_5 = 0{,}123$ m in za dolžino vezne ročice 6 vrednost $l_6 = 1{,}071$ m.



Slika 21. Ročični mehanizem z dodanim pogonskim podsklopom za delovanje na predpisanem delovnem območju.

Skupni pol ročic 2 in 5 dobimo s pomočjo Kennedy-Aronholdovega teorema:

$$P_{25}: \quad P_{12}P_{15} - P_{26}P_{56}$$

in ga uporabimo za določitev kotne hitrosti nihajoče ročice 2, razdalje med točkami določimo grafično:

$$\omega_2 = \omega_5 \frac{\overline{P_{15}P_{25}}}{\overline{P_{12}P_{25}}} = 10\ \mathrm{rad/s} \cdot \frac{0{,}468\ \mathrm{m}}{1{,}268\ \mathrm{m}} = 3{,}69\ \mathrm{rad/s}.$$

Analogno določimo še skupni pol ročice 2 in drsnika 4:

$$P_{24}: \quad P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34},$$

tako da je hitrost drsnika 4 v trenutni legi mehanizma:

$$v_4 = \omega_2 \overline{P_{12}P_{24}} = 3{,}69\ \mathrm{rad/s} \cdot 0{,}628\ \mathrm{m} = 2{,}317\ \mathrm{m/s}.$$

Od kolinearnih leg pogonske in vezne ročice je odvisen kot δ, ki vpliva na razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba:

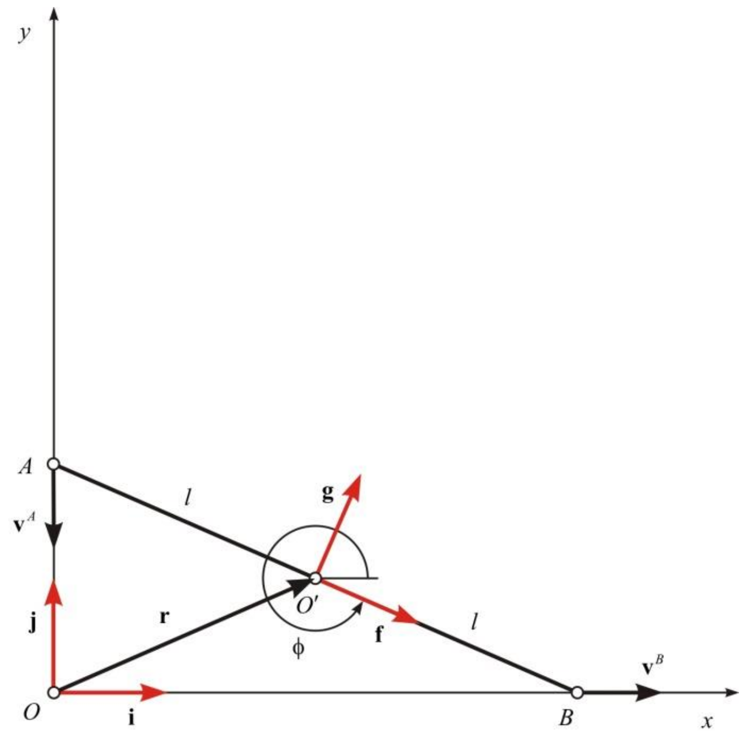
$$Q = \frac{\pi + \delta}{\pi - \delta} = \frac{195°}{165°} = 1{,}18.$$

Razmerje momentov za pogonski mehanizem je obratno razmerju kotnih hitrosti ročic 2 in 5:

$$\frac{M_2}{M_5} = \frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\overline{P_{12}P_{25}}}{\overline{P_{15}P_{25}}} = \frac{1{,}268\ \mathrm{m}}{0{,}468\ \mathrm{m}} = 2{,}71.$$

Zgled 9: Konstrukcija poloid v analitični obliki

Palica dolžine $2l$ drsi navzdol, hkrati prislonjena ob steno in tla (slika 22). Določiti je treba nepomično in pomično poloido.



Slika 22. Toga palica med tlemi in steno.

Rešitev

Palica v ravnini ima največ tri prostostne stopnje, od katerih zaradi stalnega kontakta s tlemi in steno odvzamemo dve stopnji, zato ostane ena prostostna stopnja, kar izrazimo z enačbama vezi:

$(i)\quad r_x^A = 0,$

$(ii)\quad r_y^B = 0.$

Pri analizi lege izhajamo iz enačb za lego končnih točk palice:

$$\mathbf{r}^A = \mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{s}'^A, \quad \mathbf{r}^B = \mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{s}'^B,$$

kjer sta krajevna vektorja opazovanih točk A in B v koordinatah pomičnega koordinatnega sistema:

$$\mathbf{s}'^A = \begin{bmatrix} s'^A_x \\ s'^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}'^B = \begin{bmatrix} s'^B_x \\ s'^B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lega opazovanih točk v koordinatah nepomičnega koordinatnega sistema je tako:

$$\begin{bmatrix} r^A_x \\ r^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'^A_x \\ s'^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x - l\cos\phi \\ r_y - l\sin\phi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} r^B_x \\ r^B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'^B_x \\ s'^B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x + l\cos\phi \\ r_y + l\sin\phi \end{bmatrix},$$

iz česar s pomočjo enačb vezi (i), (ii) izrazimo:

$$r_x = l\cos\phi, \qquad r_y = -l\sin\phi,$$

$$\begin{bmatrix} r^A_x \\ r^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'^A_x \\ s'^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2l\sin\phi \end{bmatrix}.$$

Ker ima v tem primeru palica eno prostostno stopnjo, rabimo eno znano kinematično količino, da določimo lego in orientacijo palice. Predpostavimo, da je znana časovna odvisnost zasuka ϕ. Izberemo točko A in določimo njeno hitrost z odvajanjem krajevnega vektorja:

$$\begin{bmatrix} v^A_x \\ v^A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\omega l\cos\phi \end{bmatrix}.$$

Znana je smer hitrosti končnih točk palice, saj se točka A giblje v smeri vzdolž stene oz. osi y, točka B pa v smeri vzdolž tal oz. osi x.

Sedaj imamo vse količine, potrebne za določitev nepomične poloide:

$$\begin{bmatrix} r^P_x \\ r^P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^A_x - \dfrac{v^A_y}{\omega} \\ r^A_y + \dfrac{v^A_x}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{-2\omega l\cos\phi}{\omega} \\ -2l\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2l\cos\phi \\ -2l\sin\phi \end{bmatrix},$$

kar ustreza enačbi krožnice s polmerom $2l$ in središčem v izhodišču koordinatnega sistema. Predznak komponente v smeri y ni pomemben, saj sta rešitvi kvadratne enačbe krožnice dve in to je ena od njiju.

Pomično poloido dobimo s pomočjo predhodno izpeljanega izraza

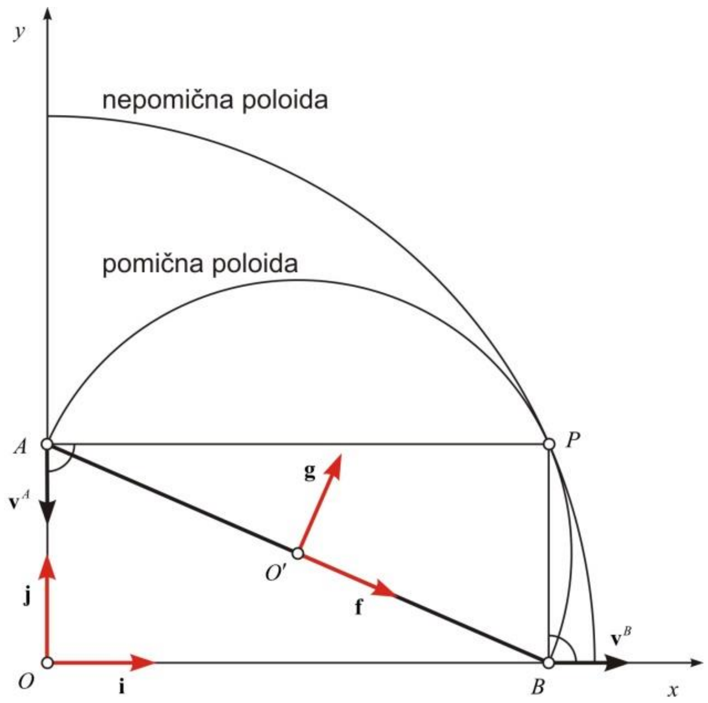
$$\begin{bmatrix} s'^P_x \\ s'^P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'^A_x - \cos\phi\dfrac{v^A_y}{\omega} + \sin\phi\dfrac{v^A_x}{\omega} \\ s'^A_y + \sin\phi\dfrac{v^A_y}{\omega} + \cos\phi\dfrac{v^A_x}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l - \cos\phi\dfrac{-2\omega l\cos\phi}{\omega} \\ \sin\phi\dfrac{-2\omega l\cos\phi}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l + 2l\cos^2\phi \\ -2l\sin\phi\cos\phi \end{bmatrix},$$

ki ga z adicijskimi izreki za trigonometrične funkcije preoblikujemo:

$$\begin{bmatrix} s'^P_x \\ s'^P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l + 2l\cos^2\phi \\ -2l\sin\phi\cos\phi \end{bmatrix} = -l\begin{bmatrix} 1 - 2\cos^2\phi \\ 2\sin\phi\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos 2\phi \\ -l\sin 2\phi \end{bmatrix},$$

kar ustreza krivulji krožnice s polmerom l.

Nepomično in pomično poloido prikazuje slika 23. Gibanje palice med tlemi in steno je ekvivalentno kotaljenju pomične poloide po nepomični. Kinematične inverzije danega primera srečamo v praksi, npr. Oldhamova sklopka ali jarem za pogon vbodne žage.

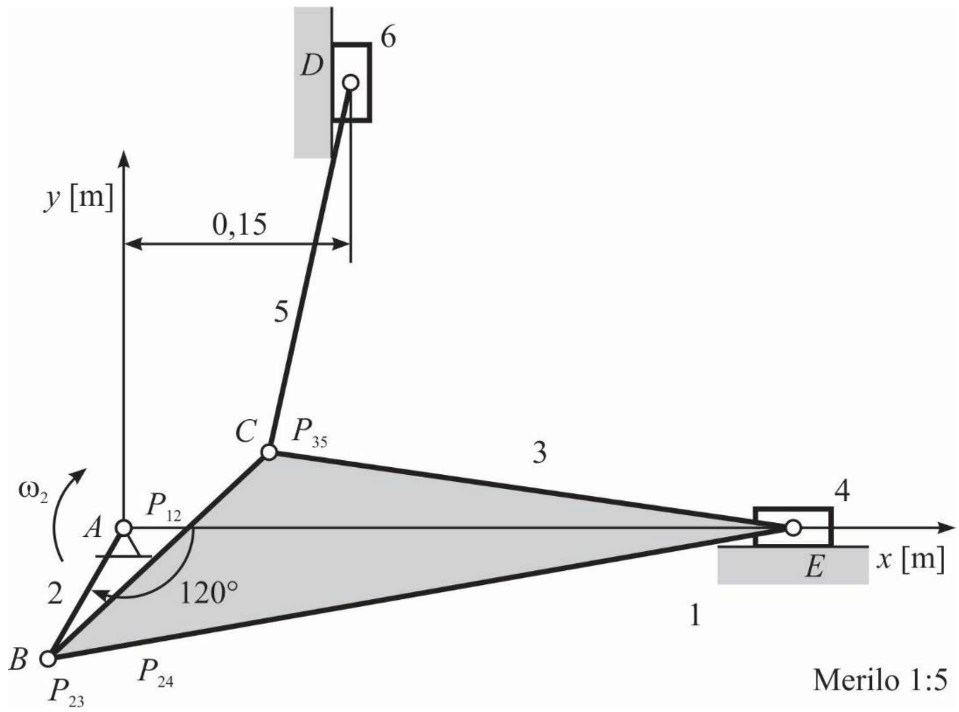


Slika 23. Gibanje palice – kotaljenje poloid.

Zgled 10: Kinematična analiza s pomočjo polov hitrosti

Za mehanizem z dvema drsnikoma (slika 24) določite trenutne pole hitrosti. Določite kotne hitrosti ročic in hitrosti točk D in E.

$\overline{AB} = 0{,}1$ m
$\overline{BC} = 0{,}2$ m
$\overline{CE} = 0{,}35$ m
$\overline{BE} = 0{,}5$ m
$\overline{CD} = 0{,}25$m
$\omega_2 = 30$ rad/s



Slika 24. Mehanizem z dvema drsnikoma.

Rešitev

Nalogo začnemo reševati z iskanjem polov hitrosti, pri čemer se osredotočimo le na pole, relevantne za reševanje naloge (slika 25).

Primarni poli so direktno določljivi, saj se nahajajo v rotacijskih in translatornih vezeh:

$$P_{12}, P_{23}, P_{35}, P_{56}, P_{16}, P_{34}, P_{14}.$$

Sekundarne pole določimo s pomočjo Kennedy-Aronholdovega teorema:

$$P_{13}: \quad P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34},$$

$$P_{36}: \quad P_{13}P_{16} - P_{35}P_{56},$$

$$P_{15}: \quad P_{13}P_{35} - P_{16}P_{56}.$$

Lego lociranih polov lahko odmerimo grafično z upoštevanjem merila slike. Točka B kroži okoli vpetja ročice 2 in je obenem pol hitrosti ročic 2 in 3, zato za njeno hitrost velja:

$$v^B = \omega_2\overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3\overline{P_{13}P_{23}} \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \omega_2\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 30\ \mathrm{rad/s}\cdot\frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}985\ \mathrm{m}} = 3{,}05\ \mathrm{rad/s}.$$

Ob predhodno določeni kotni hitrosti ročice 3 znaša hitrost točke E na drsniku 4:

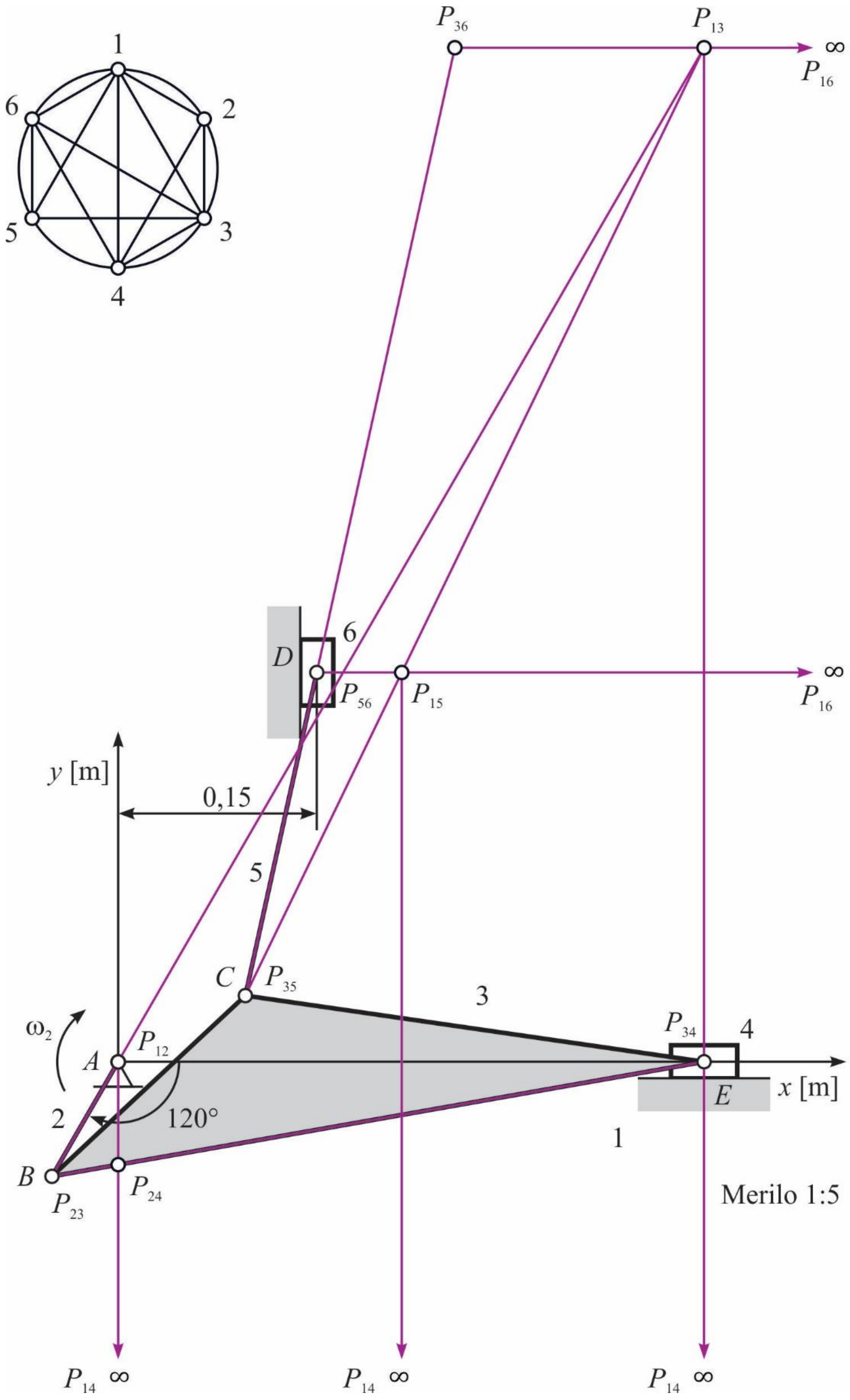
$$v^E = \omega_3\overline{P_{13}P_{34}} = 3{,}05\ \mathrm{rad/s}\cdot 0{,}767\ \mathrm{m} = 2{,}336\ \mathrm{m/s}.$$

V točki C sta povezani ročica 3 in 5, kjer se nahaja tudi njun skupni pol P_{35}. Ročica 3 kroži okoli P_{15} na nepomičnem telesu 1, prav tako ročica 5 kroži okoli pola P_{15}. Za hitrost v polu P_{35} in s tem v točki C velja relacija, na podlagi katere lahko določimo kotno hitrost ročice 5:

$$v^C = \omega_3\overline{P_{13}P_{35}} = \omega_5\overline{P_{15}P_{35}} \quad \Rightarrow \quad \omega_5 = \omega_3\frac{\overline{P_{13}P_{35}}}{\overline{P_{15}P_{35}}} = 3{,}05\ \mathrm{rad/s}\cdot\frac{0{,}796\ \mathrm{m}}{0{,}271\ \mathrm{m}} = 8{,}94\ \mathrm{rad/s}.$$

Hitrost točke D, ki je hkrati pol P_{56}, skupen ročici 5 in drsniku 6, je tako:

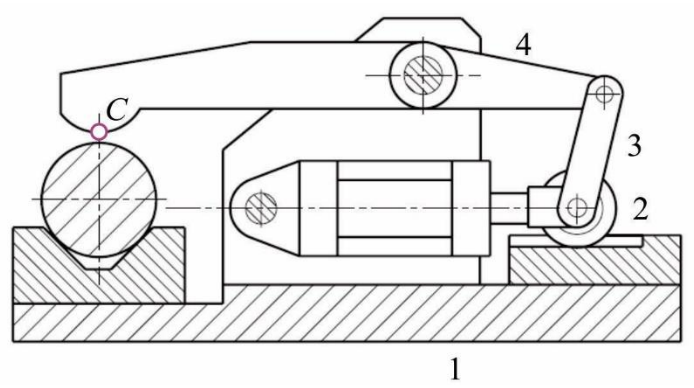
$$v^D = \omega_5\overline{P_{15}P_{56}} = 8{,}94\ \mathrm{rad/s}\cdot 0{,}064\ \mathrm{m} = 0{,}574\ \mathrm{m/s}.$$



Slika 25. Poli hitrosti za dani mehanizem.

Zgled 11: Prijemalna naprava

Slika 26 prikazuje pnevmatsko prijemalno napravo. Za trenutno lego določite pole hitrosti (kolesce 2 je podprto z ravnim vodilom). Določite razmerje med silo pnevmatskega cilindra in prijemalno silo v točki C. Kje je smiselno postaviti mejo delovnega območja? Upoštevajte, da so torne izgube zanemarljive.



Slika 26: Pnevmatska prijemalna naprava [5].

Rešitev

Prijemalna naprava je namenjena fiksiranju obdelovanca med obdelovalnim postopkom (slika 27). Pnevmatski cilinder preko ročice 3 odmakne prijemalni vzvod 4. Kolesce 2 se opira ob vodilo ohišja 1, pri čemer je kot med ročico 3 in vodilom v ohišju 1 blizu 90° na celotnem delovnem območju cilindra. Kolesce 2 zagotavlja ugodnejše torne razmere, dejansko pa ga lahko obravnavamo kot drsnik. Zaradi bližine kolinearne lege polov P_{13}, P_{23} in P_{12} naprava preko vzvoda 4 doseže veliko prijemalno silo. Pomik kolesca 2 je treba ustaviti pred vzpostavitvijo kolinearne lege polov, saj bi bilo v tem primeru območje delovanja naprave prekinjeno z mrtvo lego.

Moč, ki jo v napravo dovajamo s pnevmatskim cilindrom, se ob majhnih tornih izgubah ohranja, zato privzamemo naslednjo relacijo:

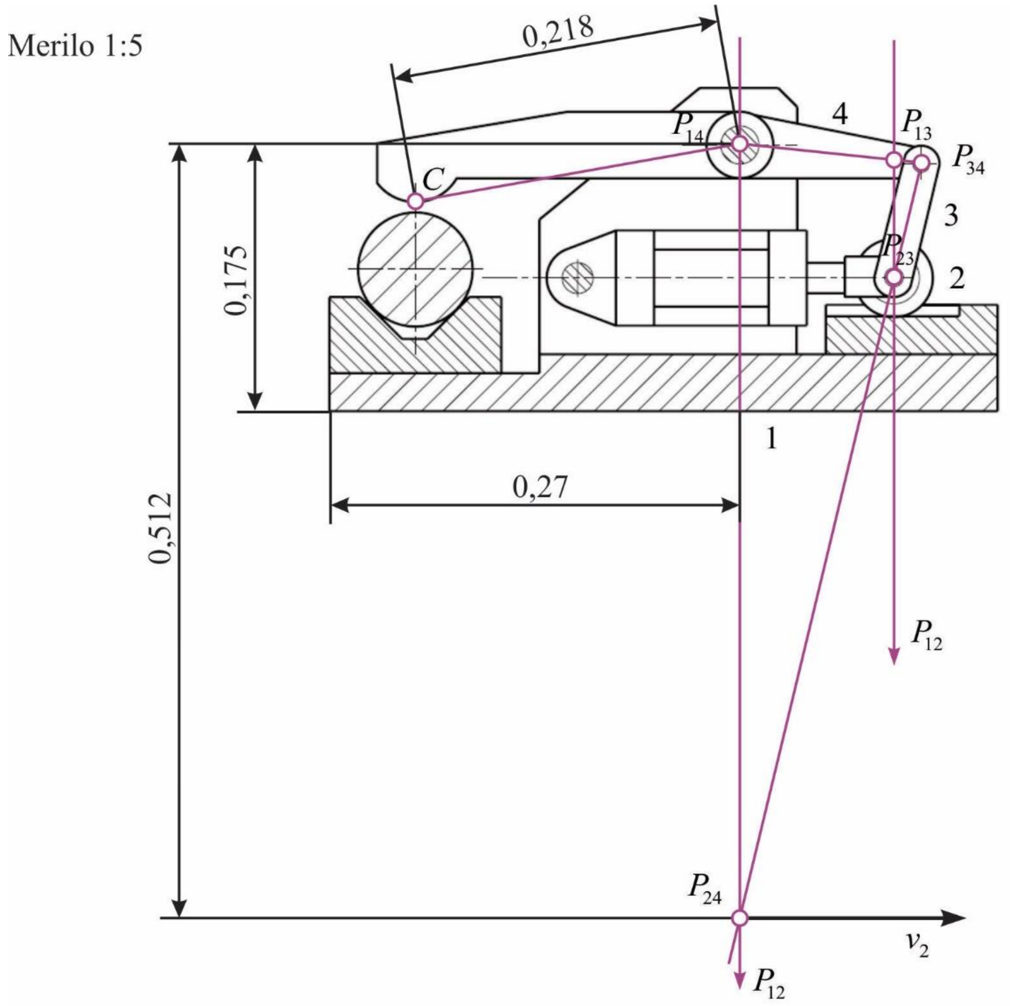
$$P = F^C v^C = F_2 v_2.$$

Hitrost prijemalne točke v_C določimo s pomočjo polov hitrosti:

$$v^C = \omega_4 \overline{P_{14}C} = v_2 \frac{\overline{P_{14}C}}{\overline{P_{14}P_{24}}}.$$

Razmerje med prijemalno silo F^C na obdelovancu in silo cilindra F_2 dobimo iz razmerja hitrosti cilindra v_2 in točke prijema C na vzvodu 4:

$$\frac{F^C}{F_2} = \frac{\overline{P_{14}P_{24}}}{\overline{P_{14}C}} = \frac{0{,}512 \text{ m}}{0{,}218 \text{ m}} = 2{,}35.$$



Slika 27. Poli hitrosti za mehanizem prijemalne naprave [5].

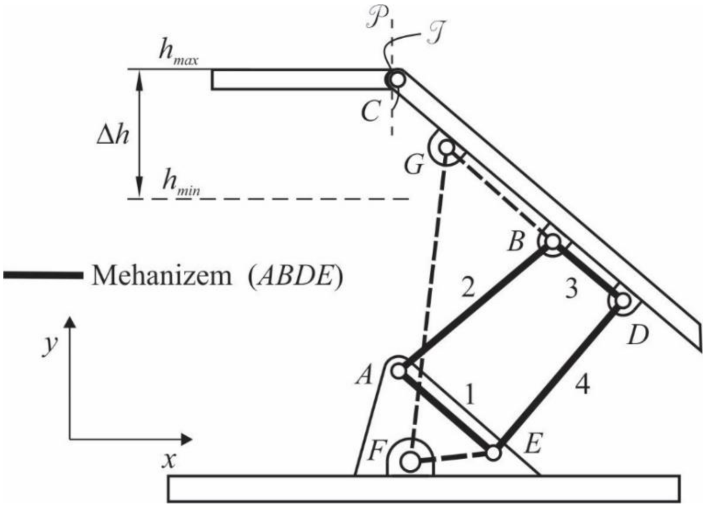
Lega pola P_{24}, skupnega pola kolesca in vzvoda, je zelo občutljiva na nagib ročice 3. Ob bližini navpične lege ročice 3 se pol P_{24} pomakne navzdol in precej poveča razmerje med prijemalno silo na obdelovancu in silo pnevmatskega cilindra. Območje delovanja je smiselno omejiti tako, da ročica 3 ne preide navpične lege.

Zgled 12: Gibanje hidravličnega podporja

Dan je vodilni štirizgibni mehanizem hidravlične podporne naprave (sliki 28 in 30). Ročica 2 se giblje s konstantno kotno hitrostjo ω_2 $(= \dot{\phi}_2)$, pri čemer se zgornja platforma na delovnem območju spusti z največje višine h_{max} do najmanjše višine h_{min}. Analizirajte gibanje točke C na ročici 3 in določite mrtvi legi mehanizma.

$l_1 = 0{,}674$ m
$l_2 = 1{,}36$ m
$l_3 = 0{,}382$ m
$l_4 = 1{,}31$ m
$l_{3a} = 1{,}4277$ m
$\theta_3 = 179{,}4°$

$\phi_1 = -40{,}8°$
$\dot{\phi}_2 = -0{,}1$ rad/s
$\phi_{2,min} = 26°$
$\phi_{2,max} = 54°$



Slika 28. Shema hidravličnega podporja [6].

Hidravlično podporje se uporablja za zaščito delovnega prostora pri odkopu premoga (slika 29). Pomik zgornje platforme podporja v navpični smeri je izveden s pomočjo vodilnega štirizgibnega mehanizma $ABDE$ in pogonskih hidravličnih cilindrov, vpetih na mesti F in G (slika 28).

Slika 29. Sekcija hidravličnega podporja (levo) [6]; podporje med obratovanjem (desno) [7].

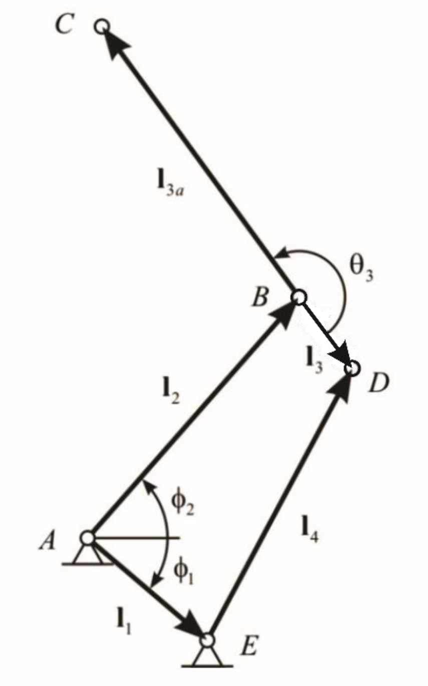
Štirizgibni mehanizem v splošnem ne more generirati linearnega gibanja za nobeno točko na vezni ročici. Kljub temu štirizgibni vodilni mehanizem podporja zagotavlja skoraj raven tir točke C na delovnem območju z minimalnim stranskim odstopanjem. S tem skoraj vso pogonsko moč koristno porabi za premagovanje bremena v navpični smeri.

Gre za inverzni problem dinamike, saj je mehanski sistem vzbujan s pomiki. Najprej je treba opraviti analizo kinematike in nato analizo obremenitev (v tem primeru ni obravnavana). Povezanost ročic izrazimo z enačbo vektorske zanke (slika 30):

$$\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_4.$$

Vektorsko obliko razcepimo na komponenti in dobimo sistem dveh skalarnih enačb:

$$(i) \quad l_3\cos\phi_3 = l_1\cos\phi_1 + l_4\cos\phi_4 - l_2\cos\phi_2,$$
$$(ii) \quad l_3\sin\phi_3 = l_1\sin\phi_1 + l_4\sin\phi_4 - l_2\sin\phi_2.$$



Slika 30. Vektorska notacija ročic mehanizma.

Vhodna količina je zasuk ϕ_2, zato sistem enačb rešujemo za preostala neznana zasuka ϕ_3, ϕ_4.

Enačbi (i) in (ii) kvadriramo in seštejemo:

$$(i) \quad l_3^2\cos^2\phi_3 = l_1^2\cos^2\phi_1 + l_4^2\cos^2\phi_4 + l_2^2\cos^2\phi_2$$
$$+2l_1l_4\cos\phi_1\cos\phi_4 - 2l_1l_2\cos\phi_1\cos\phi_2 - 2l_2l_4\cos\phi_2\cos\phi_4,$$
$$(ii) \quad l_3^2\sin^2\phi_3 = l_1^2\sin^2\phi_1 + l_4^2\sin^2\phi_4 + l_2^2\sin^2\phi_2$$
$$+2l_1l_4\sin\phi_1\sin\phi_4 - 2l_1l_2\sin\phi_1\sin\phi_2 - 2l_2l_4\sin\phi_2\sin\phi_4.$$

Vsota kvadriranih enačb (i) in (ii) je:

$$\begin{aligned} l_3^2 &= l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 \\ &+(2l_1l_4\cos\phi_1 - 2l_2l_4\cos\phi_2)\cos\phi_4 \\ &+(2l_1l_4\sin\phi_1 - 2l_2l_4\sin\phi_2)\sin\phi_4 \\ &-2l_1l_2\cos\phi_1\cos\phi_2 - 2l_1l_2\sin\phi_1\sin\phi_2. \end{aligned}$$

Kvadrirano enačbo vektorske zanke uredimo v pregledno obliko:

$$A\cos\phi_4 + B\sin\phi_4 + C = 0,$$

kjer je:

$$A = 2l_1l_4\cos\phi_1 - 2l_2l_4\cos\phi_2,$$
$$B = 2l_1l_4\sin\phi_1 - 2l_2l_4\sin\phi_2,$$
$$C = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2l_1l_2\cos\phi_1\cos\phi_2 - 2l_1l_2\sin\phi_1\sin\phi_2,$$

pri čemer je kot ϕ_1 konstanten in $\phi_2 = \phi_2(t)$.

Uvedemo substitucijo in uporabimo adicijska izreka:

$$\cos\phi_4 = \frac{1-\tan^2\dfrac{\phi_4}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\phi_4}{2}}, \qquad \sin\phi_4 = \frac{2\tan\dfrac{\phi_4}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\phi_4}{2}},$$

kjer upoštevamo substitucijo

$$k = \tan\frac{\phi_4}{2},$$

tako da sledi:

$$\cos\phi_4 = \frac{1-k^2}{1+k^2}, \qquad \sin\phi_4 = \frac{2k}{1+k^2}.$$

S pomočjo substitucije uredimo kvadratno enačbo po spremenljivki k:

$$A(1-k^2) + 2Bk + C(1+k^2) = 0,$$

$$(C-A)k^2 + 2Bk + (C+A) = 0.$$

Kvadratno enačbo rešimo:

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{A^2+B^2-C^2}}{C-A},$$

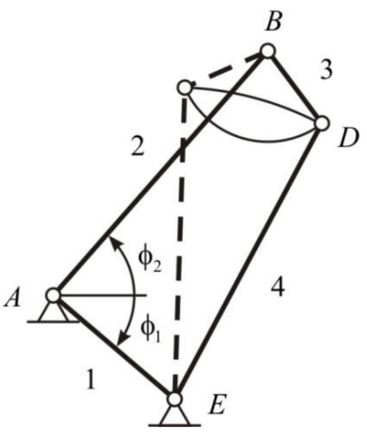
iz česar dobimo:

$$\phi_4 = 2\,\mathrm{arctan}\,k$$

in iz enačb (i) in (ii):

$$\phi_3 = \mathrm{arctan}\frac{l_1\sin\phi_1 + l_4\sin\phi_4 - l_2\sin\phi_2}{l_1\cos\phi_1 + l_4\cos\phi_4 - l_2\cos\phi_2}.$$

Od predznaka $\mp$ je odvisen način sestavljanja mehanizma oz. izbira ene od dveh geometrijskih inverzij (slika 31).



Slika 31. Geometrijski inverziji štirizgibnega mehanizma.

Z znano rešitvijo za zasuk ročice 3, ϕ_3, in glede na lego točke C na ročici 3 dobimo vektor pomikov točke C:

$$\begin{bmatrix} x^C \\ y^C \end{bmatrix} = l_2\begin{bmatrix} \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 \end{bmatrix} + l_{3a}\begin{bmatrix} \cos(\phi_3+\theta_3) \\ \sin(\phi_3+\theta_3) \end{bmatrix}.$$

Za analizo hitrosti odvajamo enačbo vektorske zanke po času in preuredimo zapis:

$$\dot{\mathbf{l}}_2 + \dot{\mathbf{l}}_3 = \dot{\mathbf{l}}_1 + \dot{\mathbf{l}}_4$$

$$l_2\dot{\phi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{bmatrix} = \& l_3\dot{\phi}_3 \begin{bmatrix} \sin\phi_3 \\ -\cos\phi_3 \end{bmatrix} + l_4\dot{\phi}_4 \begin{bmatrix} -\sin\phi_4 \\ \cos\phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3\sin\phi_3 & -l_4\sin\phi_4 \\ -l_3\cos\phi_3 & l_4\cos\phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix}.$$

Iščemo kotni hitrosti ročic 3 in 4, zato matriko na desni strani obrnemo, pri čemer upoštevamo njeno determinanto:

$$\begin{vmatrix} l_3\sin\phi_3 & -l_4\sin\phi_4 \\ -l_3\cos\phi_3 & l_4\cos\phi_4 \end{vmatrix} = l_3 l_4(\sin\phi_3\cos\phi_4 - \cos\phi_3\sin\phi_4) = l_3 l_4\sin(\phi_3 - \phi_4)$$

in dobimo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_3 \\ \dot{\phi}_4 \end{bmatrix} &= \frac{l_2\dot{\phi}_2}{l_3 l_4\sin(\phi_3 - \phi_4)} \begin{bmatrix} l_4\cos\phi_4 & l_4\sin\phi_4 \\ l_3\cos\phi_3 & l_3\sin\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{l_2\dot{\phi}_2}{l_3 l_4\,\sin(\phi_3 - \phi_4)} \begin{bmatrix} -l_4\cos\phi_4\sin\phi_2 + l_4\sin\phi_4\cos\phi_2 \\ -l_3\cos\phi_3\sin\phi_2 + l_3\sin\phi_3\cos\phi_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{l_2\dot{\phi}_2}{l_3 l_4\sin(\phi_3 - \phi_4)} \begin{bmatrix} l_4\sin(\phi_4 - \phi_2) \\ l_3\sin(\phi_3 - \phi_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Z odvajanjem vektorja pomikov točke C in ob znani rešitvi za kotno hitrost ročice 3, $\dot{\phi}_3$, dobimo za hitrost točke C:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^C \\ \dot{y}^C \end{bmatrix} = l_2\dot{\phi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{bmatrix} + l_{3a}\dot{\phi}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\phi_3 + \theta_3) \\ \cos(\phi_3 + \theta_3) \end{bmatrix}.$$

Pri analizi pospeškov ponovno odvajamo enačbo vektorske zanke:

$$\ddot{\mathbf{l}}_2 + \ddot{\mathbf{l}}_3 = \ddot{\mathbf{l}}_1 + \ddot{\mathbf{l}}_4,$$

$$\begin{aligned} l_2\ddot{\phi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{bmatrix} + l_2\dot{\phi}_2^2 \begin{bmatrix} -\cos\phi_2 \\ -\sin\phi_2 \end{bmatrix} &= l_3\ddot{\phi}_3 \begin{bmatrix} \sin\phi_3 \\ -\cos\phi_3 \end{bmatrix} + l_3\dot{\phi}_3^2 \begin{bmatrix} \cos\phi_3 \\ \sin\phi_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + l_4\ddot{\phi}_4 \begin{bmatrix} -\sin\phi_4 \\ \cos\phi_4 \end{bmatrix} + l_4\dot{\phi}_4^2 \begin{bmatrix} -\cos\phi_4 \\ -\sin\phi_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Izpostavimo kotna pospeška ročic 3 in 4 ter zapišemo v zgoščeni obliki:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2\ddot{\phi}_2\sin\phi_2 - l_2\dot{\phi}_2^2\cos\phi_2 - l_3\dot{\phi}_3^2\cos\phi_3 + l_4\dot{\phi}_4^2\cos\phi_4 \\ l_2\ddot{\phi}_2\cos\phi_2 - l_2\dot{\phi}_2^2\sin\phi_2 - l_3\dot{\phi}_3^2\sin\phi_3 + l_4\dot{\phi}_4^2\sin\phi_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_3\sin\phi_3 & -l_4\sin\phi_4 \\ -l_3\cos\phi_3 & l_4\cos\phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Determinanta matrike na desni strani je:

$$\begin{vmatrix} l_3\sin\phi_3 & -l_4\sin\phi_4 \\ -l_3\cos\phi_3 & l_4\cos\phi_4 \end{vmatrix} = l_3 l_4(\sin\phi_3\cos\phi_4 - \cos\phi_3\sin\phi_4) = l_3 l_4\sin(\phi_3 - \phi_4).$$

Enačbo obrnemo in eksplicitno izrazimo kotna pospeška na levi strani:

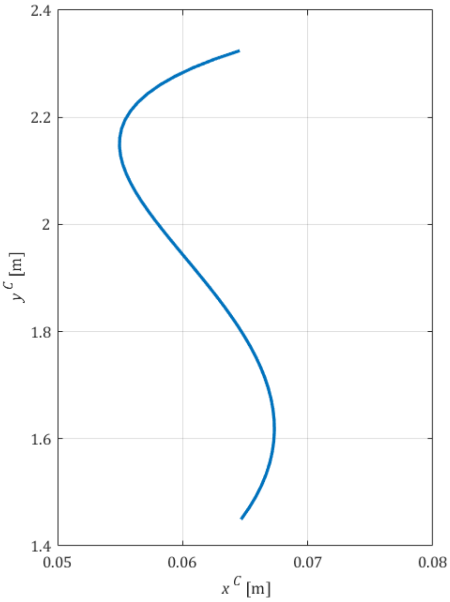
$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_3 \\ \ddot{\phi}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_3 l_4\sin(\phi_3 - \phi_4)} \begin{bmatrix} l_4\cos\phi_4 & l_4\sin\phi_4 \\ l_3\cos\phi_3 & l_3\sin\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Pospešek točke C dobimo z odvajanjem vektorja hitrosti, pri čemer upoštevamo izpeljano rešitev za kotni pospešek ročice 3, $\ddot{\phi}_3$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}^C \\ \ddot{y}^C \end{bmatrix} = l_2\ddot{\phi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{bmatrix} + l_2\dot{\phi}_2^2 \begin{bmatrix} -\cos\phi_2 \\ -\sin\phi_2 \end{bmatrix} + l_{3a}\ddot{\phi}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\phi_3+\theta_3) \\ \cos(\phi_3+\theta_3) \end{bmatrix} + l_{3a}\dot{\phi}_3^2 \begin{bmatrix} -\cos(\phi_3+\theta_3) \\ -\sin(\phi_3+\theta_3) \end{bmatrix}.$$

Iz zgornje izpeljave izhaja, da je za štirizgibni mehanizem možno rešitev enačbe sklenjene zanke v poiskati simbolični obliki, kar omogoča, da je tudi analiza kinematike za ta pogost tip mehanizma opravljena v simbolični obliki.

Slika 32 prikazuje tir točke C, ki ob pomiku v navpični smeri 0,875 m opravi prečni pomik le približno 0,012 m, kar znaša manj kot 1,5% pomika v navpični smeri.



Slika 32. Tir točke C na hidravličnem podporju.

Moment dovajamo na pogonsko ročico 2, iz česar zato izhajamo pri določanju mrtvih leg. Še prej preverimo Grashofov pogoj:

$$(s+l) \leq (p+q),$$

$$\big(l_3 + l_2\ (= 1{,}742\ \mathrm{m})\big) \leq (l_1 + l_4\ (= 1{,}984\ \mathrm{m})),$$

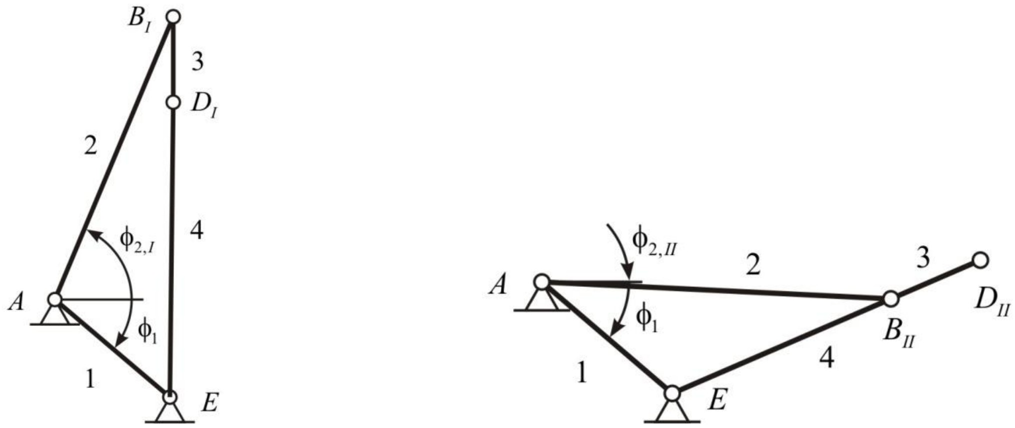
ki ga mehanizem izpolnjuje. Možna je rotacija ročice 3, ker pa je ročica 1 fiksna, lahko ročici 2 in 4 glede na ročico 1 samo nihata. Mrtvi legi tako nastopita, ko sta ročici 3 in 4 kolinearni, pri čemer se vzpostavi trikotna geometrija mehanizma in nadaljnje gibanje mehanizma ni mogoče, ne glede na velikost momenta na ročici 2. Za kolinearna položaja ročic 3 in 4 lahko zasuk ročice 2 določimo s pomočjo kosinusnega izreka za trikotnik:

1. mrtva lega (Slika 33, levo):

$$\cos\big(\phi_{2,I} - \phi_1\big) = \frac{l_2^2 + l_1^2 - (l_3 + l_4)^2}{2 l_2 l_1}, \qquad \phi_{2,I} = 66{,}9°.$$

2. mrtva lega (Slika 33, desno):

$$\cos\big(\phi_{2,II} - \phi_1\big) = \frac{l_2^2 + l_1^2 - (l_4 - l_3)^2}{2 l_2 l_1}, \qquad \phi_{2,II} = 2{,}7°.$$



Slika 33. Prva mrtva lega (levo); druga mrtva lega(desno).

Dodatno lahko izpeljemo še *Freudensteinovo enačbo* [8]. Predpostavimo primer, da je $\phi_1 = 0$. Ta predpostavka ne vpliva na relativno gibanje ročic, saj kot ϕ_1 vpliva le na orientacijo celotnega mehanizma v ravnini.

Kot predhodno, enačbo sklenjene vektorske zanke razcepimo na komponenti, ki ju kvadriramo in seštejemo. Kvadrirano enačbo vektorske zanke nato zapišemo v obliki, pri kateri izpostavimo faktorje s ϕ_2 in ϕ_4, obenem je $\sin\phi_1 = 0$ in $\cos\phi_1 = 1$:

$$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 - 2l_1l_2\cos\phi_2 + 2l_1l_4\cos\phi_4 - 2l_2l_4(\cos\phi_2\cos\phi_4 + \sin\phi_2\sin\phi_4),$$

$$\frac{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l_2l_4} - \frac{l_1}{l_4}\cos\phi_2 + \frac{l_1}{l_2}\cos\phi_4 = \cos\phi_2\cos\phi_4 + \sin\phi_2\sin\phi_4.$$

Nadaljnjo poenostavitev dosežemo z vpeljavo koeficientov

$$K_1 = \frac{l_1}{l_2}, \qquad K_2 = -\frac{l_1}{l_4}, \qquad K_3 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l_2l_4}$$

in uporabo adicijskega izreka za razliko kotov, tako da dobimo Freudensteinovo enačbo:

$$K_1\cos\phi_4 + K_2\cos\phi_2 + K_3 = \cos(\phi_2 - \phi_4).$$

Freudensteinova enačba se uporablja pri sintezi štirizgibnega mehanizma, in sicer za doseganje želene kinematične prenosne funkcije zasukov ročic 2 in 4. Pri tem definiramo tri zaporedne zasuke ročice 2, $\phi_{2,1}, \phi_{2,2}, \phi_{2,3}$, in pripadajoče zasuke ročice 4, $\phi_{4,1}, \phi_{4,2}, \phi_{4,3}$. Dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami, koeficienti K_1, K_2, K_3:

$$K_1\cos\phi_{4,1} + K_2\cos\phi_{2,1} + K_3 = \cos(\phi_{2,1} - \phi_{4,1}),$$
$$K_1\cos\phi_{4,2} + K_2\cos\phi_{2,2} + K_3 = \cos(\phi_{2,2} - \phi_{4,2}),$$
$$K_1\cos\phi_{4,3} + K_2\cos\phi_{2,3} + K_3 = \cos(\phi_{2,3} - \phi_{4,3}).$$

Z rešitvijo sistema enačb za neznanke dobimo razmerja ročic, ki zagotavljajo želeno prenosno funkcijo. Zatem je treba izbrati še eno od dolžin ročic, da lahko določimo dolžine preostalih ročic, ter ustrezno orientacijo nepomične ročice.

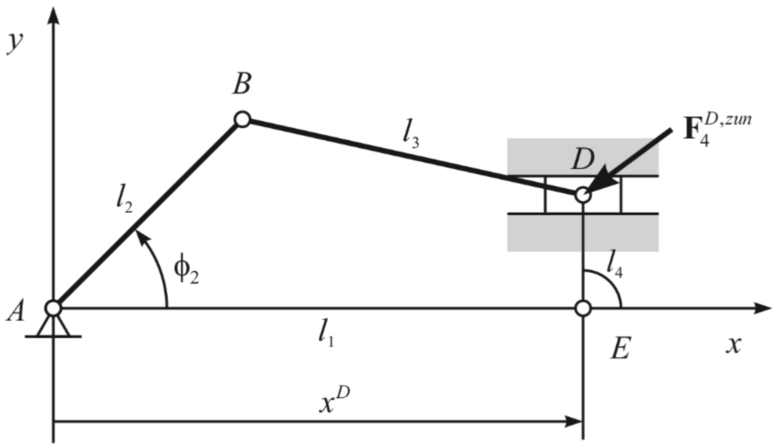
C. Dinamika

Zgled 13: Analiza dinamike ročičnega mehanizma

Dan je ročični mehanizem s pogonsko ročico 2, vezno ročico 3 in drsnikom 4 (slika 34). Ročici 2 in 3 sta konstantnega prereza, z masama m_2 in m_3 ter vztrajnostnima momentoma J_2 in J_3. Določite pomik, hitrost in pospešek drsnika, če je kotna hitrost ω_2 ročice 2 konstantna. Pri analizi dinamike upoštevajte tudi vplive dodatne zunanje sile $\mathbf{F}_4^{D,zun}$ na drsnik 4, ekscentričnosti drsnika ($l_4 > 0$) in trenja μ med drsnikom in vodilom.

Podatki so naslednji:

$l_2 = 0{,}2\ \text{m}$
$l_3 = 0{,}4\ \text{m}$
$l_4 = 0\ \text{m}$
$m_2 = 2\ \text{kg}$
$m_3 = 2{,}5\ \text{kg}$
$m_4 = 2\ \text{kg}$
$J_2 = 0{,}0067\ \text{kgm}^2$
$J_3 = 0{,}033\ \text{kgm}^2$
$N = 60\ \text{vrt/min}$
$F_{4,x}^{D,zun} = -100\ \text{N},\ F_{4,y}^{D,zun} = 0\ \text{N},\quad 3\pi/2 \le \phi_2 \le 2\pi$
$\mu = 0{,}3$



Slika 34. Ročični mehanizem z drsnikom.

Rešitev

Naloga podaja problem inverzne dinamike, kjer je sistem vzbujan kinematično, ob znani odvisnosti vhodnega parametra od časa. Mehanizem ima eno prostostno stopnjo, za vhodni parameter izberemo $\phi_2 = \phi_2(t)$. Najprej določimo kotno hitrost pogonske ročice 2:

$$\dot{\phi}_2\ (= \omega_2) = 2\pi \frac{N\ [1/\text{min}]}{60\ \text{s}} = 2\pi\ \ \text{rad/s}.$$

Za ročični mehanizem (le-ta je modifikacija štirizgibnega mehanizma, pri katerem je gibanje drsnika po premici ekvivalentno gibanju končne točke na vrtljivo vpeti ročici neskončne dolžine) je možno kinematiko ročic in drsnika izraziti analitično. Ročice med vezmi lahko ponazorimo kot vektorje, ki tvorijo sklenjeno vektorsko zanko (slika 35):

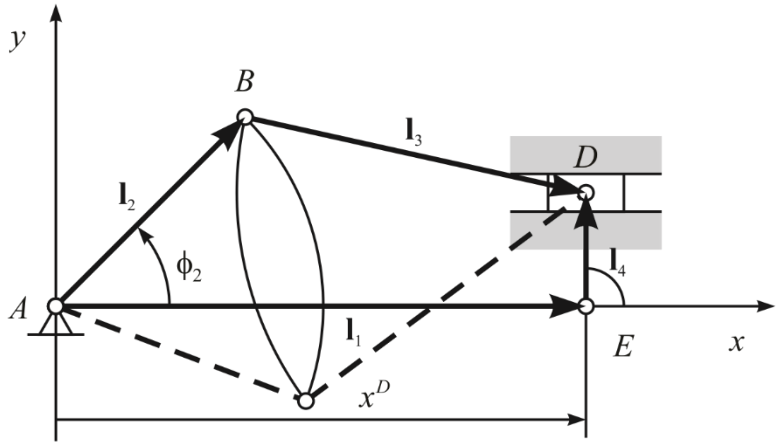
$$\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_4,$$

ki jo zapišemo kot sistem dveh nelinearnih algebraičnih enačb za v smereh koordinatnih osi x in y nepomičnega koordinatnega sistema:

$$(i)\ \ l_2\cos\phi_2 + l_3\cos\phi_3 = l_1\cos\phi_1 + l_4\cos\phi_4,$$

$$(ii)\ \ l_2\sin\phi_2 + l_3\sin\phi_3 = l_1\sin\phi_1 + l_4\sin\phi_4,$$

kjer velja $\phi_1 = 0$, $\phi_4 = \pi/2$, dolžina vektorja $\mathbf{l}_1$ je spremenljiva: $l_1 = x^D$.



Slika 35. Sklenjena vektorska zanka in druga geometrijska inverzija (črtkano) ročičnega mehanizma.

Iz enačbe (ii) izrazimo zasuk vezne ročice 3:

$$\sin\phi_3 = \frac{l_4 - l_2\sin\phi_2}{l_3}, \qquad \phi_3 = \arcsin\frac{l_4 - l_2\sin\phi_2}{l_3}$$

ter s pomočjo adicijskega izreka ($\cos x^2 + \sin x^2 = 1$) še v enačbi (i):

$$\cos\phi_3 = \pm\sqrt{1 - (\frac{l_4 - l_2\sin\phi_2}{l_3})^2} = \pm\frac{1}{l_3}\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2\sin\phi_2)^2},$$

kjer pozitivni in negativni predznak ($\pm$) odražata dva različna načina sestave (geometrijski inverziji) ročičnega mehanizma (slika 35). Za dano geometrijsko inverzijo dobimo funkcijo za pomik drsnika v odvisnosti od zasuka ϕ_2 pogonske ročice 2:

$$x^D(= l_1) = l_2\cos\phi_2 + l_3\cos\phi_3,$$

$$x^D = l_2\cos\phi_2 + \sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2\sin\phi_2)^2}.$$

V primeru obravnavanega mehanizma je analitična rešitev enačbe sklenjene zanke možna, kar pa ni splošno pravilo.

Z odvajanjem zasuka ϕ_3 dobimo še kotno hitrost in kotni pospešek za vezno ročico 3:

$$\dot{\phi}_3 = -\frac{\dot{\phi}_2 l_2 \cos\phi_2}{\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}},$$

$$\ddot{\phi}_3\ (= \alpha_3) = \frac{l_2}{\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}}\left[-\ddot{\phi}_2 \cos\phi_2 + \dot{\phi}_2^2 \sin\phi_2 + \frac{\dot{\phi}_2^2 l_2 \cos{\phi_2}^2 (l_4 - l_2 \sin\phi_2)}{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}\right].$$

Glede na predpisano gibanje pogonske ročice 2 je njen kotni pospešek enak nič, $\ddot{\phi}_2\ (= \alpha_2) = 0$.

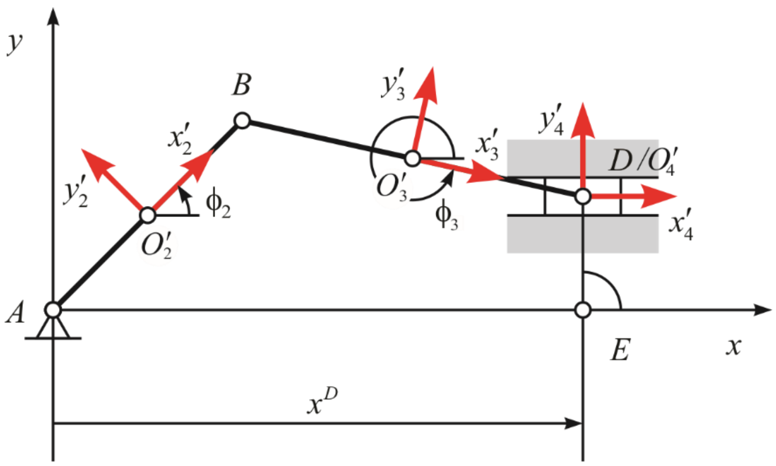
Hitrost drsnika dobimo z odvajanjem enačbe za pomik, ki jo lahko uredimo tudi s pomočjo predhodno izpeljanih izrazov za $\dot{\phi}_3$ in $\sin\phi_3$ v odvisnosti od ϕ_2 in $\dot{\phi}_2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}^D (= v^D) &= -l_2 \dot{\phi}_2 \sin\phi_2 - l_3 \dot{\phi}_3 \sin\phi_3 \\ &= \dot{\phi}_2 l_2 \left[-\sin\phi_2 + \cos\phi_2 \frac{l_4 - l_2 \sin\phi_2}{\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}}\right].\end{aligned}$$

Pospešek drsnika dobimo z dvakratnim odvajanjem enačbe za pomik, kjer lahko upoštevamo tudi predhodno izpeljane izraze za $\dot{\phi}_3$, $\ddot{\phi}_3$, $\sin\phi_3$ in $\cos\phi_3$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^D (= a^D) &= -l_2 \ddot{\phi}_2 \sin\phi_2 - l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos\phi_2 - l_3 \ddot{\phi}_3 \sin\phi_3 - l_3 \dot{\phi}_3^2 \cos\phi_3 \\ &= -\ddot{\phi}_2 l_2 \left[\sin\phi_2 + \cos\phi_2 \frac{l_4 - l_2 \sin\phi_2}{\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}}\right] \\ &\quad - \frac{\dot{\phi}_2^2 l_2}{\sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}}\left[(l_4 - l_2 \sin\phi_2)\sin\phi_2 + \cos\phi_2 \sqrt{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{l_2 l_3^2 {\cos\phi_2}^2}{l_3^2 - (l_4 - l_2 \sin\phi_2)^2}\right].\end{aligned}$$

V nadaljevanju pogonski ročici 2, vezni ročici 3 in drsniku 4 pridružimo pomični koordinatni sistem, katerega izhodišče postavimo v masno središče posameznega telesa ročičnega mehanizma (slika 36). S poznavanjem kinematike pogonske ročice 2, vezne ročice 3 in drsnika 4 lahko določimo pomike, hitrosti in pospeške opazovanih točk na njih, ki jih rabimo pri analizi sil in momentov v mehanizmu.



Slika 36. Pomični koordinatni sistem na ročici 2, vezni ročici 3 in drsniku 4.

Krajevni vektorji opazovanih točk A, B in D v koordinatah pomičnih koordinatnih sistemov pogonske ročice 2 in vezne ročice 3:

$$\mathbf{s}'^A_2 = \begin{bmatrix} -l_2/2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{s}'^B_2 = \begin{bmatrix} l_2/2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{s}'^B_3 = \begin{bmatrix} -l_3/2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{s}'^D_3 = \begin{bmatrix} l_3/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z upoštevanjem rotacijskih matrik za ročico 2 in ojnico 3, $\mathbf{A}_2$ in $\mathbf{A}_3$, dobimo lego opazovanih točk in masnih središč za obe telesi še v koordinatah nepomičnega koordinatnega sistema:

$$\mathbf{s}^A_2 = \begin{bmatrix} s^A_{2,x} \\ s^A_{2,y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2\mathbf{s}'^A_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -l_2/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,l_2/2\cos\phi_2 \\ -l_2/2\sin\phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}^B_2 = \begin{bmatrix} s^B_{2,x} \\ s^B_{2,y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2\mathbf{s}'^B_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_2/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2/2\cos\phi_2 \\ l_2/2\sin\phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}^B_3 = \begin{bmatrix} s^B_{3,x} \\ s^B_{3,y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3\mathbf{s}'^B_3 = \begin{bmatrix} \cos\phi_3 & -\sin\phi_3 \\ \sin\phi_3 & \cos\phi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -l_3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,l_3/2\cos\phi_3 \\ -l_3/2\sin\phi_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}^D_3 = \begin{bmatrix} s^D_{3,x} \\ s^D_{3,y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3\mathbf{s}'^D_3 = \begin{bmatrix} \cos\phi_3 & -\sin\phi_3 \\ \sin\phi_3 & \cos\phi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3/2\cos\phi_3 \\ l_3/2\sin\phi_3 \end{bmatrix}.$$

Koordinate pogonske ročice 2, vezne ročice 3 in drsnika 4 (koordinate izhodišč pomičnih koordinatnih sistemov teles O'_2, O'_3 in O'_4):

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{s}^A_2 = \begin{bmatrix} l_2/2\cos\phi_2 \\ l_2/2\sin\phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{s}^B_2 - \mathbf{s}^B_3 = \mathbf{r}^B - \mathbf{s}^B_3 = \begin{bmatrix} l_2\cos\phi_2 + l_3/2\cos\phi_3 \\ l_2\sin\phi_2 + l_3/2\sin\phi_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{s}^D_3 = \begin{bmatrix} l_2\cos\phi_2 + l_3\cos\phi_3 \\ l_2\sin\phi_2 + l_3\sin\phi_3 \end{bmatrix},$$

z njihovim odvajanjem pa dobimo hitrost teles:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2/2\,\dot\phi_2\sin\phi_2 \\ l_2/2\,\dot\phi_2\cos\phi_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2\dot\phi_2\sin\phi_2 - l_3/2\,\dot\phi_3\sin\phi_3 \\ l_2\dot\phi_2\cos\phi_2 + l_3/2\,\dot\phi_3\cos\phi_3 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_4 = \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2\dot\phi_2\sin\phi_2 - l_3\dot\phi_3\sin\phi_3 \\ l_2\dot\phi_2\cos\phi_2 + l_3\dot\phi_3\cos\phi_3 \end{bmatrix},$$

in pospešek teles:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2/2\,(\ddot\phi_2\sin\phi_2 + \dot\phi_2^2\cos\phi_2) \\ l_2/2\,(\ddot\phi_2\cos\phi_2 - \dot\phi_2^2\sin\phi_2) \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2\left(\ddot\phi_2\sin\phi_2 + \dot\phi_2^2\cos\phi_2\right) - l_3/2\,(\ddot\phi_3\sin\phi_3 + \dot\phi_3^2\cos\phi_3) \\ l_2\left(\ddot\phi_2\cos\phi_2 - \dot\phi_2^2\sin\phi_2\right) + l_3/2\,(\ddot\phi_3\cos\phi_3 - \dot\phi_3^2\sin\phi_3) \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_4 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_4 \\ \ddot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2\left(\ddot\phi_2\sin\phi_2 + \dot\phi_2^2\cos\phi_2\right) - l_3\left(\ddot\phi_3\sin\phi_3 + \dot\phi_3^2\cos\phi_3\right) \\ l_2\left(\ddot\phi_2\cos\phi_2 - \dot\phi_2^2\sin\phi_2\right) + l_3\left(\ddot\phi_3\cos\phi_3 - \dot\phi_3^2\sin\phi_3\right) \end{bmatrix},$$

kjer lahko upoštevamo predhodno izpeljane izraze za zasuk, kotno hitrost in kotni pospešek pogonske ročice 2 in vezne ročice 3 in jih tako analitično izrazimo v odvisnosti od ϕ_2, $\dot\phi_2$ in $\ddot\phi_2$. Hkrati lahko pri poenostavitvi upoštevamo, da je pomik drsnika 4 možen le v vodoravni smeri, zato je $\dot{y}_4 = 0$ in $\ddot{y}_4 = 0$, prav tako velja tudi $x_4 = x^D$, $\dot{x}_4 = \dot{x}^D$ in $\ddot{x}_4 = \ddot{x}^D$.

Pri opisu dinamike mehanizma izhajamo iz Newton-Eulerjevih enačb. Na ravninsko telo i v točki j deluje sila $\mathbf{F}_i^j$. Lokalni koordinatni sistem telesa se nahaja v masnem središču, krajevni vektor točke j je $\mathbf{s}_i^j$ oziroma $\mathbf{s'}_i^j$, ko je izražen v koordinatah lokalnega sistema.

Newtonova ravnotežna enačba povezuje sile, ki delujejo na telo, z njegovim gibanjem, ki nastane kot posledica delovanja sil:

$$\sum_j \mathbf{F}_i^j = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i,$$

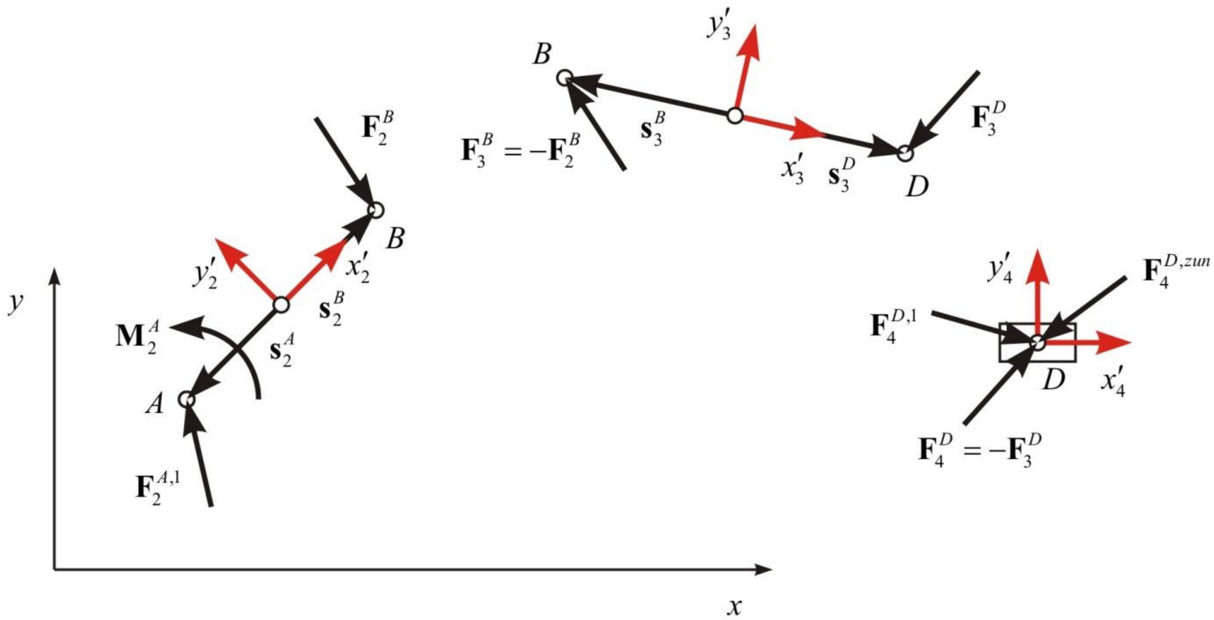
kjer je $\mathbf{F}_i^j$ vektor sile, ki deluje v točki j na telesu i, m_i masa telesa i in $\ddot{\mathbf{r}}_i$ vektor pospeška masnega središča telesa i. Za posamezno telo lahko vektorsko obliko Newtonove ravnotežne enačbe zapišemo kot sistem dveh skalarnih enačb za komponente sil, ki delujejo v smeri osi x in y nepomičnega koordinatnega sistema.

Eulerjeva ravnotežna enačba

$$\sum_j \mathbf{s}_i^j \times \mathbf{F}_i^j + \sum_k \mathbf{M}_i^k = \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (= J_i \ddot{\phi}_i)$$

opisuje rotacijsko gibanje telesa i, kjer leva stran enačbe predstavlja rezultirajoči moment okoli masnega središča, na desni strani enačbe pa sta $\ddot{\phi}_i$ kotni pospešek telesa i, ki nastane kot posledica delovanja momentov na telo, in J_i vztrajnostni moment za masno središče telesa. Rezultirajoči moment na levi strani enačbe je sestavljen iz vsote momentov $\mathbf{M}_i^k$, ki delujejo na telo, in vsote momentov $\mathbf{s}_i^j \times \mathbf{F}_i^j$, ki se pojavijo kot posledica delovanja sile $\mathbf{F}_i^j$ v točki j izven masnega središča. Eulerjeva ravnotežna enačba je v splošnem vektorska, vendar se v primeru ravninskega gibanja poenostavi v skalarno.

Ročični mehanizem – sistem treh gibljivih teles razčlenimo na posamezna toga telesa, na katera delujejo sile in momenti in za vsako telo v obravnavanem mehanizmu zapišemo Newton-Eulerjeve ravnotežne pogoje v obliki treh skalarnih enačb (slika 37).



Slika 37. Razčlenitev mehanizma – sistema teles na posamezna telesa, na katera delujejo sile in momenti.

Pogonska ročica 2 (slika 38):

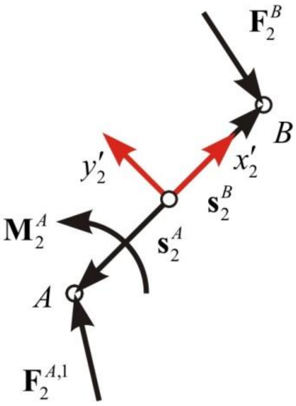
$$\mathbf{F}_2^{A,1} + \mathbf{F}_2^B + m_2\mathbf{g} = \mathbf{F}_2^{A,1} - \mathbf{F}_3^B + m_2\mathbf{g} = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2,$$

$$\mathbf{M}_2^A + \mathbf{s}_2^A \times \mathbf{F}_2^{A,1} + \mathbf{s}_2^B \times \mathbf{F}_2^B = \mathbf{M}_2^A + \mathbf{s}_2^A \times \mathbf{F}_2^{A,1} - \mathbf{s}_2^B \times \mathbf{F}_3^B = \mathbf{J}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2,$$

(1) $F_{2,x}^{A,1} - F_{3,x}^B = m_2\ddot{x}_2,$

(2) $F_{2,y}^{A,1} - F_{3,y}^B = m_2\ddot{y}_2 + m_2 g,$

(3) $M_2^A + s_{2,x}^A F_{2,y}^{A,1} - s_{2,y}^A F_{2,x}^{A,1} - s_{2,x}^B F_{3,y}^B + s_{2,y}^B F_{3,x}^B = J_2\ddot{\phi}_2.$



Slika 38. Obremenitve ročice 2.

Pri tem smo upoštevali, da zaradi zakona o akciji in reakciji velja $F_{2,x}^A = -F_{3,x}^B$ in $F_{2,y}^A = -F_{3,y}^B$, zato lahko iz ravnotežnih enačb izločimo $F_{2,x}^A$ in $F_{2,y}^A$.

Vezna ročica 3 (slika 39):

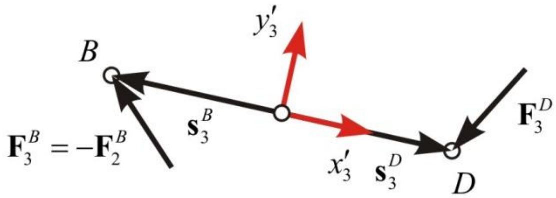
$$\mathbf{F}_3^B + \mathbf{F}_3^D + m_3\mathbf{g} = \mathbf{F}_3^B - \mathbf{F}_4^D + m_3\mathbf{g} = m_3\ddot{\mathbf{r}}_3,$$

$$\mathbf{s}_3^B \times \mathbf{F}_3^B + \mathbf{s}_3^D \times \mathbf{F}_3^D = \mathbf{s}_3^B \times \mathbf{F}_3^B - \mathbf{s}_3^D \times \mathbf{F}_4^D = \mathbf{J}_3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3,$$

(4) $F_{3,x}^B - F_{4,x}^D = m_3\ddot{x}_3,$

(5) $F_{3,y}^B - F_{4,y}^D = m_3\ddot{y}_3 + m_3 g,$

(6) $s_{3,x}^B F_{3,y}^B - s_{3,y}^B F_{3,x}^B - s_{3,x}^D F_{4,y}^D + s_{3,y}^D F_{4,x}^D = J_3\ddot{\phi}_3.$

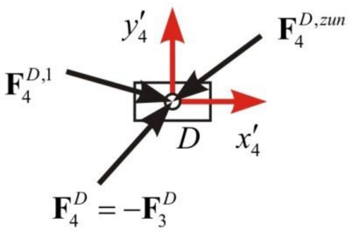


Slika 39. Obremenitve ročice 3.

Tudi tu dodatno upoštevamo, da velja $F_{3,x}^D = -F_{4,x}^D$ in $F_{3,y}^D = -F_{4,y}^D$ in s tem izločimo $F_{3,x}^D$ in $F_{3,y}^D$.

Drsnik 4 (slika 40):

$$\mathbf{F}_4^D + \mathbf{F}_4^{D,1} + \mathbf{F}_4^{D,zun} + m_4\mathbf{g} = m_4\ddot{\mathbf{r}}_4.$$



Slika 40. Obremenitve na drsniku 4.

Momentna enačba se anulira – ima obe strani enaki nič, saj drsnik v vodilu ne omogoča rotacije, sile, ki na drsnik prijemljejo v točki D, pa ne povzročajo momenta:

(7) $F_{4,x}^D + F_{4,x}^{D,1} = m_4\ddot{x}_4 - F_{4,x}^{D,zun}$,

oz. z upoštevanjem trenja med drsnikom in vodilom:

$$F_{4,x}^D \pm \mu F_{4,y}^{D,1} = m_4\ddot{x}_4 - F_{4,x}^{D,zun},$$

(8) $F_{4,y}^D + F_{4,y}^{D,1} = m_4\ddot{y}_4 + m_4 g - F_{4,y}^{D,zun}$.

Če upoštevamo trenje med drsnikom in vodilom, sta komponenti sile $\mathbf{F}_4^{D,1}$ povezani po naslednji enačbi:

$$F_{4,x}^{D,1} = \pm\mu F_{4,y}^{D,1},$$

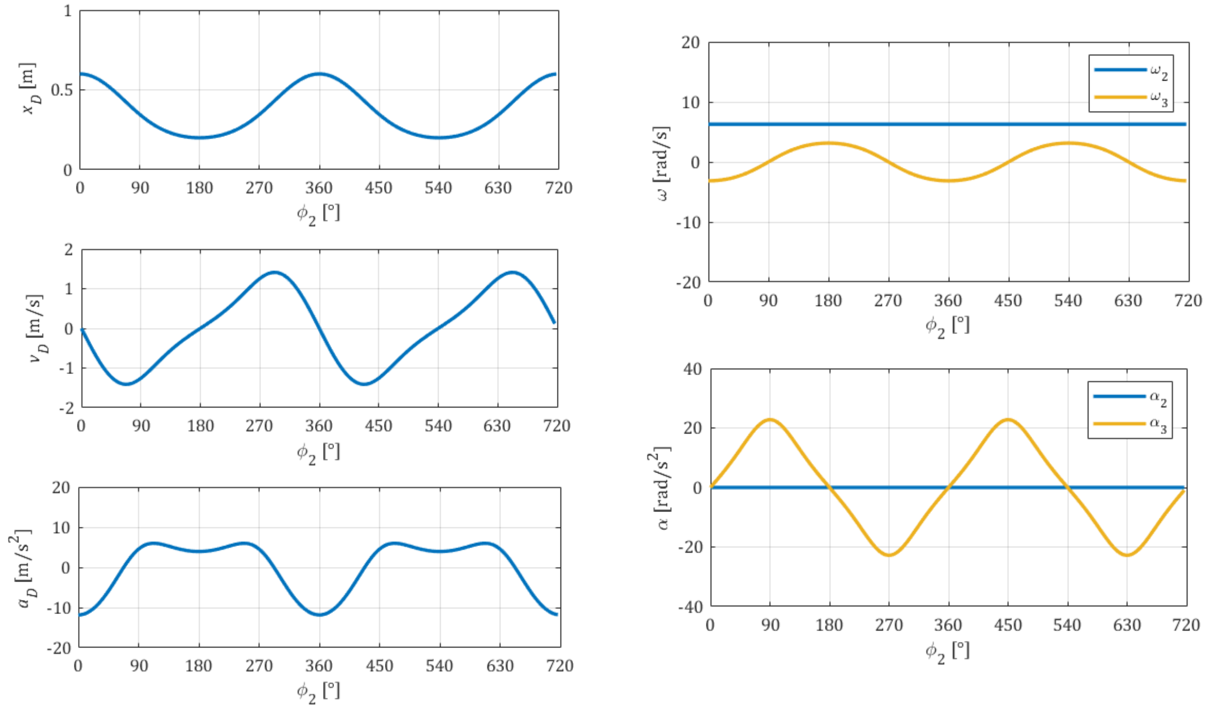
kjer je μ koeficient trenja, z ustreznim predznakom pa upoštevamo trenutno smer gibanja drsnika, pri čemer sila trenja na drsnik deluje v smeri nasprotni gibanju drsnika glede na vodilo. Zgornja enačba omogoča, da komponento $F_{4,x}^{D,1}$ izločimo iz nabora neznank tako, da jo izrazimo v odvisnosti od sile $F_{4,y}^{D,1}$, ki deluje med drsnikom in vodilom v smeri pravokotno na vodilo.

Ravnotežne enačbe (1)–(8) za pogonsko ročico 2, vezno ročico 3 in drsnik 4 ročičnega mehanizma zapišemo v matrični obliki kot sistem enačb:

$$\begin{array}{c} (1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\\(7)\\(8) \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-s_{2,y}^A & s_{2,x}^A & s_{2,y}^B & -s_{2,x}^B & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -s_{3,y}^B & s_{3,x}^B & s_{3,y}^D & -s_{3,x}^D & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm\mu & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} F_{2,x}^{A,1}\\ F_{2,y}^{A,1}\\ F_{3,x}^B\\ F_{3,y}^B\\ F_{4,x}^D\\ F_{4,y}^D\\ F_{4,y}^{D,1}\\ M_2^A \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} m_2\ddot{x}_2\\ m_2\ddot{y}_2 + m_2 g\\ J_2\ddot{\phi}_2\\ m_3\ddot{x}_3\\ m_3\ddot{y}_3 + m_3 g\\ J_3\ddot{\phi}_3\\ m_4\ddot{x}_4 - F_{4,x}^{D,zun}\\ m_4\ddot{y}_4 + m_4 g - F_{4,y}^{D,zun} \end{bmatrix},$$

pri čemer na osnovi predhodne analize kinematike poznamo elemente matrike na levi, ki odraža geometrijo in povezanost teles v mehanizmu, ter elemente stolpca s pospeški na desni strani, z rešitvijo sistema enačb pa določimo tudi iskane reakcijske obremenitve, $F_{2,x}^{A,1}$, $F_{2,y}^{A,1}$, $F_{3,x}^B$, $F_{3,y}^B$, $F_{4,x}^D$, $F_{4,y}^D$, $F_{4,y}^{D,1}$, M_2^A, za vsak trenutek na opazovanem časovnem intervalu.

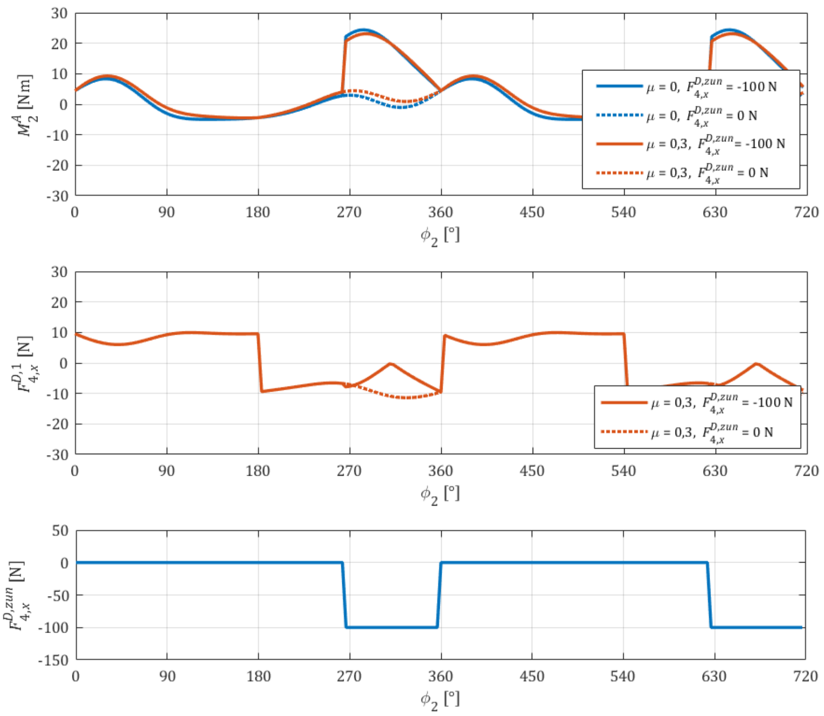
Slika 41 prikazuje lego, hitrost in pospešek linearno vodenega drsnika 4 ter kotno hitrost in kotni pospešek pogonske ročice 2 in vezne ročice 3. Pri ročičnem mehanizmu se rotacijsko gibanje pogonske ročice 2 preko vezne ročice 3 pretvori v translatorno gibanje drsnika 4, zato se ob konstantni hitrosti pogonske ročice hitrosti gibanje drsnika ročičnega mehanizma razlikuje od sinusne poteka, predvsem pri hitrosti in pospešku drsnika.



Slika 41. (levo) lega, hitrost in pospešek drsnika 4; (desno) kotna hitrost in kotni pospešek pogonske ročice 2 in vezne ročice 3 ročičnega mehanizma.

Slika 42 prikazuje moment na pogonski ročici 2, ko drsnik med delovnim ciklom ni obremenjen z dodatno zunanjo silo ($F_{4,x}^{D,zun} = 0$ N) in ko zunanja sila obremenjuje drsnik v liniji gibanja drsnika pri zasuku pogonske ročice med 270° in 360° ($F_{4,x}^{D,zun} = -100$ N). Dodatna zunanja obremenitev drsnika sicer vpliva na reakcije v vezeh mehanizma in s tem tudi na potek sile trenja med drsnikom in nepomičnim vodilom, vendar je v obeh primerih vpliv trenja na moment v danem primeru razmeroma majhen.

Na primeru ročičnega mehanizma je prikazan pristop z inverzno dinamiko, kjer so znane obremenitve in gibanje elementov mehanizma za opazovani trenutek. Najprej je treba opraviti analizo kinematike, katere rezultat so lege, hitrosti in pospeški za elemente mehanizma in opazovane točke na njih. V našem primeru smo analizo kinematike izvedli popolnoma analitično, na osnovi sklenjene vektorske zanke, vendar pa rešitev nastopi v obliki razmeroma dolgoveznih enačb. Ko imamo znane kinematične razmere, lahko za vsak element mehanizma nastavimo Newton-Eulerjeve ravnotežne pogoje. Z rešitvijo matrične enačbe dobimo reakcije v vezeh za določeno lego mehanizma.



Slika 42. Moment na pogonski ročici 2 glede na upoštevano trenje in dodatno obremenitev drsnika, sila trenja med drsnikom in vodilom ter dodatna zunanja sila na drsnik.

Pristop z inverzno dinamiko je v nemalo primerih smotrn, saj je običajno možno opredeliti gibanje mehanizma in s tem kinematične razmere, predvsem pri konstantni hitrosti pogona. Iz geometrije mehanizma je pri različni legah možno učinkovito oceniti lastnosti mehanizma pri prenosu moči in gibanja. Obenem pa je reševanje inverznega problema dinamike dovolj preprosto, vsaj v primeru štirizgibnega mehanizma in njegovih izpeljank.

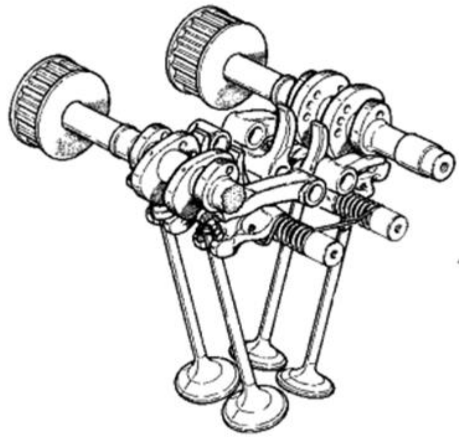
D. Krivuljni mehanizmi

Zgled 14: Določitev kinematičnih diagramov za krivuljni mehanizem

Gibanje ventila batnega motorja (slika 43) naj bo razdeljeno na naslednje faze, glede na zasuk gredi z odmično krivuljo ϕ:

- Faza I: mirovanje v zaprti legi, $0 \leq \phi < \pi$,
- Faza II: odpiranje (dvig): $\pi \leq \phi < 3\pi/2$,
- Faza III: zapiranje (spust): $3\pi/2 \leq \phi < 2\pi$.

Odmična krivulja naj zagotavlja cikloidno zakonitost pri odpiranju in zapiranju ventila z največjim translatornim pomikom $h = 10$ mm. Narišite kinematične diagrame (»$svaj$-diagrame«, s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška) za celoten delovni cikel, skupaj s fazo mirovanja, ko je ventil zaprt. Pri tem izpeljite pripadajoče enačbe za fazo spusta in fazo dviga.



Slika 43. Krmilni mehanizem ventilov pri motorju z notranjim zgorevanjem [9].

Rešitev

Splošna oblika cikloidnega gibanja pri dvigu ali spustu slednika izhaja iz sinusnega poteka pospeška:

$$a = A_1 \sin 2\pi \frac{\theta}{\beta}, \quad 0 \leq \theta \leq \beta,$$

ki je v tej obliki zapisan v odvisnosti od relativnega zasuka odmične krivulje θ in je izražen v enoti $[\mathrm{m/rad^2}]$. Faza gibanja se začne pri $\theta = 0$ in konča pri $\theta = \beta$, kolikor traja faza, izražena z zasukom odmične krivulje.

Spremembo pospeška, j $[\mathrm{m/rad^3}]$, dobimo direktno z odvajanjem pospeška po θ:

$$j = A_1 \frac{2\pi}{\beta} \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta} \quad [\mathrm{m/rad^3}],$$

pri čemer ugotovimo, da ima sprememba pospeška j pri cikloidnem gibanju končne vrednosti.

Za hitrost in pomik slednika je potrebna integracija pospeška z upoštevanjem začetnih pogojev.

Za hitrost, v [m/rad], dobimo:

$$v = \int a dt = \int A_1 \sin 2\pi \frac{\theta}{\beta} d\theta = -A_1 \frac{\beta}{2\pi} \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta} + A_2 \, .$$

Upoštevamo začetni pogoj, da na začetku faze spusta (ali dviga) slednik miruje, $\theta = 0$: $\quad v = 0$. Dobimo:

$$v(\theta = 0) = -A_1 \frac{\beta}{2\pi} \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta} + A_2 = 0,$$

tako da za integracijski konstanti velja:

$$A_2 = A_1 \frac{\beta}{2\pi} \, ,$$

kar upoštevamo v splošnem poteku hitrosti pri cikloidnem gibanju:

$$v = A_1 \frac{\beta}{2\pi} \left(1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta}\right).$$

Z nadaljnjo integracijo dobimo še pomik slednika, s [m]:

$$\begin{aligned} s &= \int v dt = \int A_1 \frac{\beta}{2\pi} (1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta}) d\theta \\ &= A_1 \frac{\beta}{2\pi} \left(\theta - \frac{\beta}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\theta}{\beta}\right) + A_3. \end{aligned}$$

Za fazo spusta upoštevamo začetna pogoja:

$(i) \quad \theta = 0: \quad s = h \quad \Rightarrow \quad A_3 = h,$

$(ii) \quad \theta = \beta: \quad s = 0,$

$$s(\theta = \beta) = A_1 \frac{\beta}{2\pi} \beta + h = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{2\pi}{\beta^2} h$$

in dobimo potek pomika slednika med spustom:

$$s = h \left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\theta}{\beta}\right).$$

Z upoštevanjem integracijskih konstant in ureditvijo dobimo hitrost za fazo spusta:

$$v = -\frac{h}{\beta} \left(1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta}\right),$$

prav tako pospešek:

$$a = -h \frac{2\pi}{\beta^2} \sin 2\pi \frac{\theta}{\beta}$$

in spremembo pospeška:

$$j = -h \frac{4\pi^2}{\beta^3} \cos 2\pi \frac{\theta}{\beta}.$$

Za fazo dviga veljata naslednja začetna pogoja:

$(i) \quad \theta = 0: \quad s = 0 \quad \Rightarrow \quad A_3 = 0,$

$(ii) \quad \theta = \beta: \quad s = h,$

$$s(\theta=\beta)=A_1\frac{\beta}{2\pi}\beta-h=0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1=\frac{2\pi}{\beta^2}h.$$

Podobno z upoštevanjem začetnih pogojev za fazo dviga dobimo potek pomika slednika:

$$s(\theta)=h(\frac{\theta}{\beta}-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{\theta}{\beta})$$

in nato še hitrost:

$$v(\theta)=\frac{h}{\beta}(1-\cos 2\pi\frac{\theta}{\beta})$$

ter pospešek:

$$a(\theta)=h\frac{2\pi}{\beta^2}\sin 2\pi\frac{\theta}{\beta}$$

in spremembo pospeška:

$$j(\theta)=h\frac{4\pi^2}{\beta^3}\cos 2\pi\frac{\theta}{\beta}.$$

Relativni zasuk θ je v splošnem odvisen od dejanskega zasuka gredi z odmično krivuljo, $\theta=\theta(\phi)$. Ker se odmična krivulja običajno vrti s konstantno kotno hitrostjo ω [rad/s], tako da velja $\phi(t)=\omega t$, lahko z vstavitvijo $\phi(t)$ namesto θ v zgornji izpeljavi izrazimo kinematične količine za slednik v odvisnosti od časa, in sicer dobimo ob zaporednem odvajanju pomika s za hitrost, pospešek in spremembo pospeška:

$$v(t)\ [\mathrm{m/s}]=\omega\cdot(v(\theta)\ [\mathrm{m/rad}]),$$

$$a(t)\ [\mathrm{m/s^2}]=\omega^2\cdot(a(\theta)\ [\mathrm{m/rad^2}]),$$

$$j(t)\ [\mathrm{m/s^3}]=\omega^3\cdot(j(\theta)\ [\mathrm{m/rad^3}]).$$

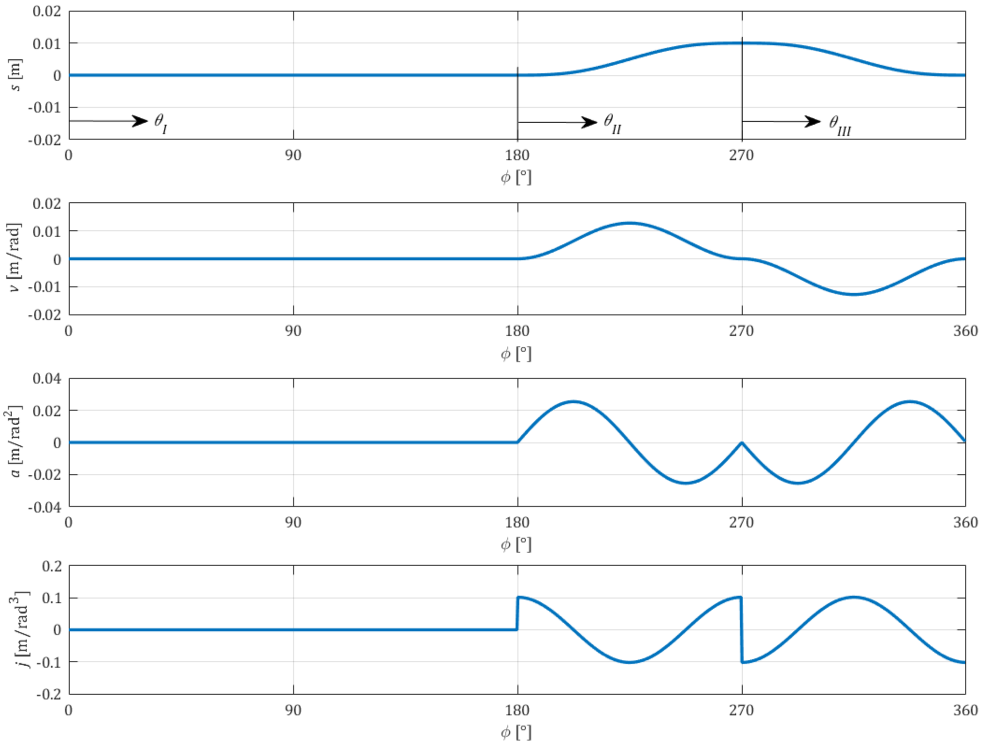
Pri izrisu *svaj*-diagramov za dani primer upoštevamo, da je dejanski zasuk gredi z odmično krivuljo ob začetku faze dviga $\phi=\beta_I$, zato velja:

$$\theta_{II}=\phi-\beta_I=\phi-\pi$$

in podobno za fazo spusta:

$$\theta_{III}=\phi-\beta_{II}-\beta_{II}=\phi-3\pi/2.$$

Slika 44 prikazuje *svaj*-diagrame za dani primer. Z zapisom kinematičnih količin za slednik v odvisnosti od zasuka odmične krivulje θ oz. ϕ in njihovim prikazom na *svaj*-diagramih je možno ne glede na hitrost obratovanja enostavno ovrednotiti dinamiko krivuljnega mehanizma ter identificirati morebitne slabosti njegove izvedbe, s tem pa tudi omogočiti ustrezne prilagoditve za izboljšanje delovanja mehanizma.



Slika 44. $svaj$-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška.

Odmična krivulja, pri kateri je potek pospeška slednika nezvezen oz. sprememba pospeška nima končne vrednosti, ni primerna za hitro obratovanje.

Zgled 15: Oblikovanje krivuljnega mehanizma

Dan je krivuljni mehanizem s točkovnim dotikom translatorno vpetega slednika s hodom $h = 15$ mm in odmično krivuljo, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo. Glede na zasuk odmične krivulje ϕ so faze gibanja slednika:

- faza I: mirovanje v spodnji legi, $0 \leq \phi < \pi/2$,
- faza II: dvig, $\pi/2 \leq \phi < \pi$,
- faza III: mirovanje v zgornji legi, $\pi \leq \phi < 3\pi/2$,
- faza IV: spust, $3\pi/2 \leq \phi < 2\pi$.

V fazi dviga je predpisano enostavno harmonično gibanje, v fazi spusta pa cikloidno gibanje. Določite obliko odmične krivulje in narišite $svaj$-diagrame gibanja slednika.

Rešitev

Splošna oblika enostavnega harmoničnega gibanja za pomik slednika pri dvigu, ki pri tem sledi sinusni funkciji, je:

$$s = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{\theta}{\beta}\right),$$

kjer je θ relativni zasuk odmične krivulje in β celoten zasuk odmične krivulje med fazo dviga (trajanje faze).

Z nadaljnjim odvajanjem enačbe za pomik slednika po neodvisni spremenljivki θ dobimo hitrost:

$$v = \frac{h}{2}\frac{\pi}{\beta}\sin\pi\frac{\theta}{\beta},$$

pospešek:

$$a = \frac{h}{2}(\frac{\pi}{\beta})^2\cos\pi\frac{\theta}{\beta},$$

in spremembo pospeška:

$$j = -\frac{h}{2}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^3\sin\pi\frac{\theta}{\beta}.$$

Slednik v prvi fazi cikla miruje. Za drugo fazo pri zasuku, kjer upoštevamo trajanje faze β_{II} in odvisnost relativnega zasuka θ_{II} od dejanskega zasuka odmične gredi ϕ:

$$\beta_{II} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{II} = \phi - \frac{\pi}{2},$$

je potek dviga slednika in ostalih kinematičnih količin v odvisnosti od zasuka odmične gredi:

$$s_{II} = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{\theta_{II}}{\beta_{II}}\right) = \frac{h}{2}\big(1 - \cos(2\phi - \pi)\big),$$

hitrost:

$$v_{II} = h\sin(2\phi - \pi),$$

pospešek:

$$a_{II} = 2h\cos(2\phi - \pi)$$

in sprememba pospeška:

$$j_{II} = -4h\sin(2\phi - \pi).$$

V tretji fazi cikla ponovno nastopi mirovanje, v četrti fazi pa je predpisan spust po cikloidni zakonitosti. Za cikloidno zakonitost pri spustu smo potek kinematičnih količin izpeljali v Zgledu 14, katerega rezultat priredimo za dani primer. Za četrto fazo velja:

$$\beta_{IV} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{IV} = \phi - \frac{3\pi}{2}.$$

Z vstavitvijo dejanskega zasuka gredi ϕ namesto relativnega zasuka θ dobimo potek pomika slednika med spustom:

$$s_{IV} = 4h\left(1 - \frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{8\pi}\sin(4\phi - 6\pi)\right).$$

Z upoštevanjem integracijskih konstant in ureditvijo dobimo hitrost za fazo spusta:

$$v_{IV}(\theta) = -\frac{2h}{\pi}\big(1 - \cos(4\phi - 6\pi)\big),$$

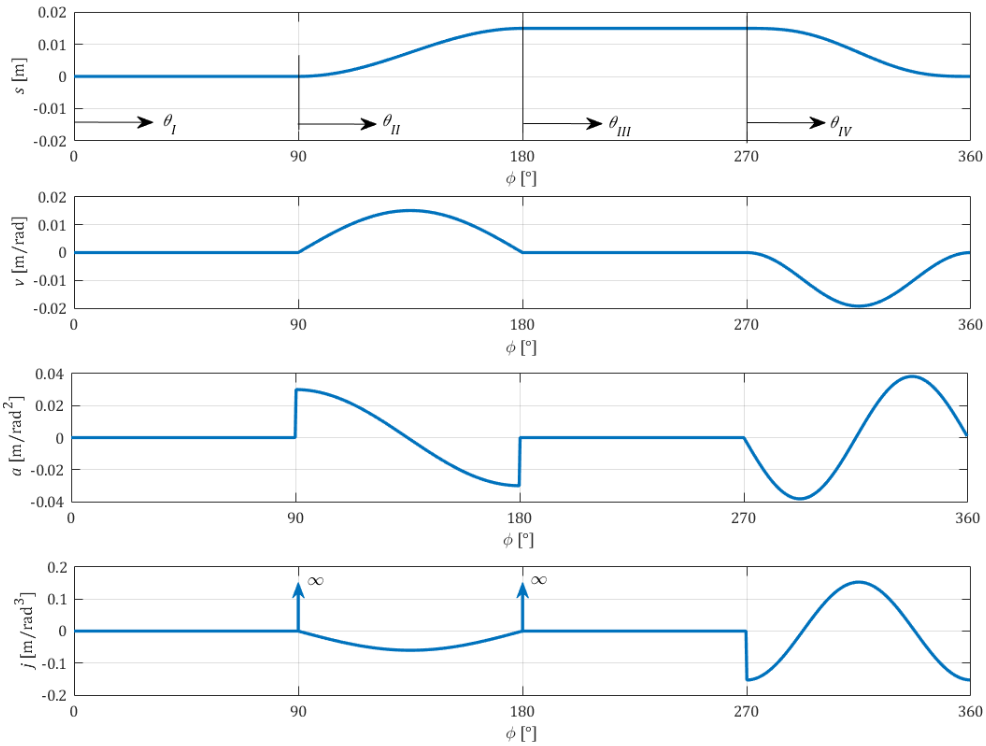
prav tako pospešek:

$$a_{IV} = -\frac{8h}{\pi}\sin(4\phi - 6\pi)$$

in spremembo pospeška:

$$j_{IV} = -\frac{32h}{\pi}\cos(4\phi - 6\pi).$$

Potek kinematičnih količin za dani zgled je prikazan na *svaj*-diagramih (slika 45). Pri enostavnem harmoničnem gibanju v fazi II ob prehodu iz faze I (mirovanje spodaj) in ob prehodu v fazo III (mirovanje zgoraj) potek pospeška nezvezen, zato ima sprememba pospeška neskončno vrednost.



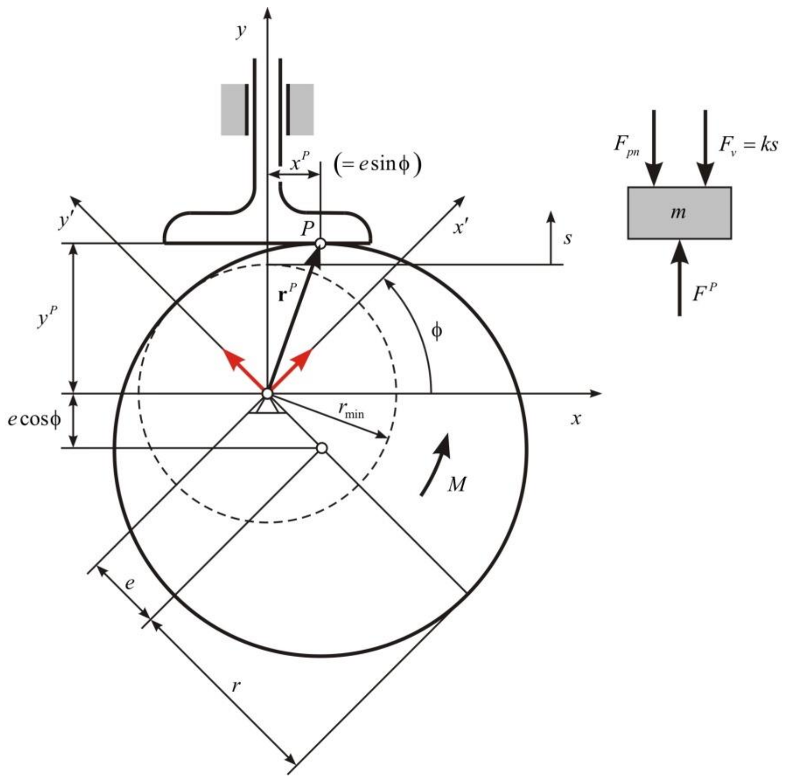
Slika 45. svaj-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška.

Zgled 16: Potek kontaktne sile pri krivuljnem mehanizmu

Translatorno vpeti slednik ploske oblike se v kombinaciji z vrtljivo odmično krivuljo, ki ima obliko ekscentrično vpete krožnice (slika 46), giblje po enostavni harmonični zakonitosti, pri čemer med fazo dviga in fazo spusta ni faze mirovanja slednika.

Določite potek kontaktne sile med odmično krivuljo in slednikom, na katerega deluje prednapeta pritisna vzmet. Pri tem je ekscentričnost odmične krivulje (krožnice) $e = 20$ mm, premer osnovnega kroga odmične krivulje $r_{min} = 50$ mm, vzmetna konstanta $k = 500$ N/m, masa slednika $m = 5$ kg, sila prednapetja $F_{pn} = 50$ N. Odmična krivulja se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω, tako da je njen zasuk $\phi = \omega t$.

Kdaj se kontakt med odmično ploskvijo in slednikom prekine pri $\omega = 10\pi$ rad/s? Kakšna je najvišja kotna hitrost odmične ploskve, da bo kontakt še neprekinjen?



Slika 46. Vrtljiva odmična krivulja s ploskim slednikom.

Rešitev

Na podlagi geometrije danega krivuljnega mehanizma (slika 46) lahko za relativni pomik slednika s zapišemo:

$$s = e(1 - \cos\phi),$$

kar ustreza definiciji enostavne harmonične zakonitosti (gl. Zgled 15). Z odvajanjem pomika dobimo še hitrost, pospešek in spremembo pospeška slednika:

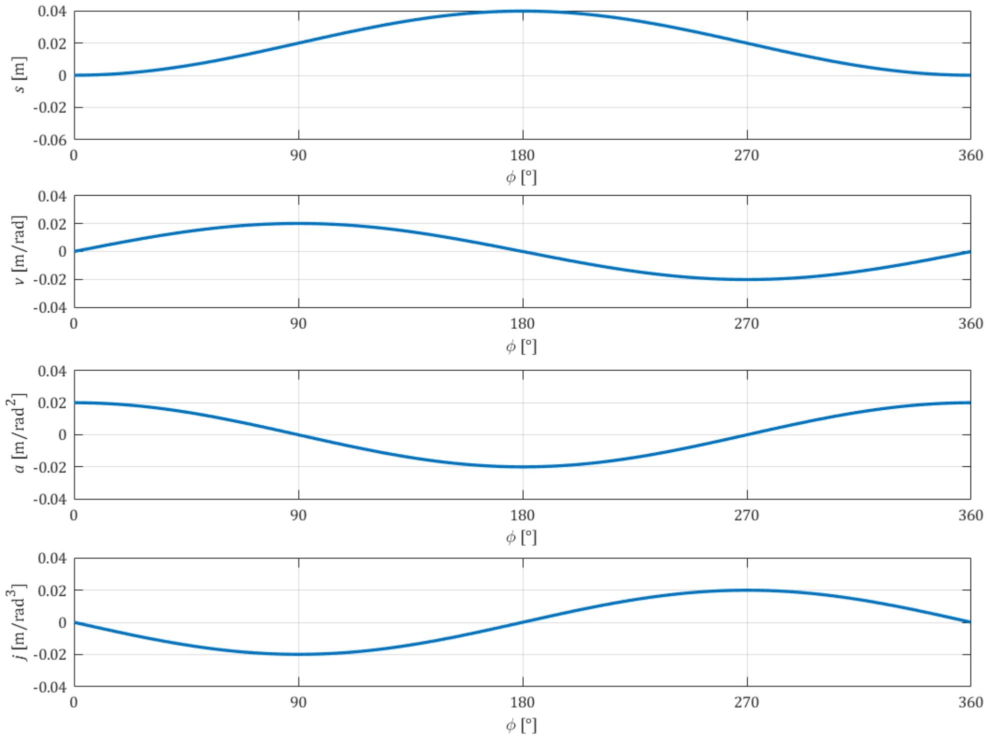
$$v = e\sin\phi,$$

$$a = e\cos\phi,$$

$$j = -e\sin\phi.$$

Pri dani izvedbi odmične krivulje med fazo dviga ($0 \leq \phi < \pi$) in fazo spusta ($\pi \leq \phi < 2\pi$) ni vmesne faze mirovanja, zato je potek pospeška na celotnem vrtljaju odmične krivulje zvezen, sprememba pospeška pa ima končne vrednosti, kot je razvidno s $svaj$-diagramov (Slika 47).

Za pravilno delovanje krivuljnih mehanizmov mora biti kontakt med odmičnim in slednim elementom neprekinjen v vsakem trenutku, sicer odmični element ne vzbuja slednika v skladu z želeno zakonitostjo gibanja, prav tako $svaj$-diagrami (Slika 47) veljajo le pri neprekinjenem kontaktu. V splošnem lahko neprekinjen kontakt zagotavljamo s pomočjo pritisne vzmeti ali pa oblikovno, tj. z dvostranskim kontaktom ali konjugiranima krivuljama.



Slika 47. $svaj$-diagrami; s – pomik, v – hitrost, a – pospešek, j – sprememba pospeška.

V danem primeru pri izračunu kontaktnih razmer med slednikom in odmično krivuljo izhajamo iz Newtonove ravnotežne enačbe:

$$\sum_i F_i = ma_i.$$

Upoštevamo, da na slednik delujejo sila pritisne vzmeti $F_v = -ks$, kjer je s poves vzmeti oz. pomik slednika, kontaktna sila F^P v točki P in sila prednapetja F_{pn}, ki vplivajo na dinamično ravnotežje pri gibanju slednika z maso m:

$$-ks - F_{pn} + F^P = m\ddot{s}.$$

Glede na predhodno izpeljavo upoštevamo zasuk odmične krivulje pri konstantni kotni hitrosti, $\phi = \omega t$, in za gibanje slednika zapišemo:

$$s = e(1 - \cos\phi) = e(1 - \cos\omega t),$$

$$v = \dot{s} = e\omega \sin \omega t,$$

$$a = \ddot{s} = e\omega^2 \cos \omega t,$$

$$j = \dddot{s} = -e\omega^3 \sin \omega t.$$

Z upoštevanjem zakonitosti gibanja slednika je kontaktna sila v točki P:

$$F^P = m\ddot{s} + ks + F_{pn},$$

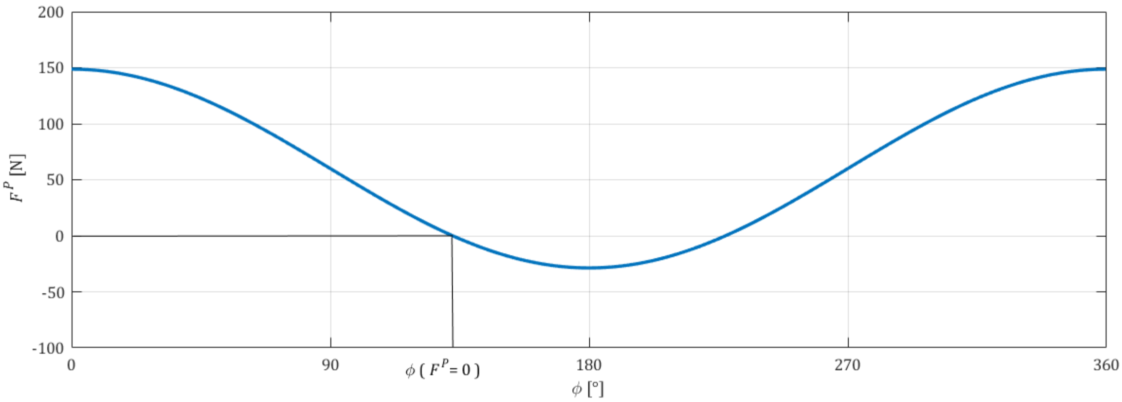
$$F^P = me\omega^2\cos\omega t + ke(1 - \cos\omega t) + F_{pn} = e(m\omega^2 - k)\cos\omega t + ke + F_{pn}.$$

Z vstavitvijo danih podatkov za mehanizem dobimo potek kontaktne sile v odvisnosti od časa t:

$$F^P(t)$$
$$= 0{,}02\ \mathrm{m} \cdot (5\ \mathrm{kg} \cdot (10\pi\ \mathrm{rad/s})^2 - 500\ \mathrm{N/m}) \cdot \cos(10\pi\ \mathrm{rad/s} \cdot t) + 500\ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} + 50\ \mathrm{N}$$
$$= (88{,}696 \cdot \cos(10\pi\ \mathrm{rad/s} \cdot t) + 60)\ \mathrm{N},$$

oz. v odvisnosti od zasuka odmične krivulje ϕ, ob predpostavki, da je kontakt med slednikom in odmično krivuljo neprekinjen tudi, ko ima F^P teoretično negativne vrednosti (slika 48):

$$F^P(\phi) = (88{,}696 \cdot \cos\phi + 60)\ \mathrm{N}.$$



Slika 48. Teoretična kontaktna sila (neprekinjen kontakt).

V kolikor slednik sledi odmičnemu elementu, je kontaktna sila med njima večja od nič. V splošnem lahko do prekinitve kontakta med slednim in odmičnim elementom pride zaradi neugodne kombinacije prevelike obratovalne hitrosti, premajhne togosti ali prednapetja pritisne vzmeti, prevelike vztrajnosti slednika in neustrezne zakonitosti gibanja. Pri poteku kontaktne sile, kot ga prikazuje Slika 48, moramo določiti pogoje, pri katerih je kontaktna sila enaka nič:

$$F^P = e(m\omega^2 - k)\cos\omega t + ke + F_{pn} = 0,$$

iz česar izrazimo zasuk odmične krivulje $\phi_{F^P=0}$ oz. trenutek $t_{F^P=0}$, pri katerem se kontakt prekine:

$$\phi_{F^P=0} = \omega t_{F^P=0} = \arccos\frac{ke + F_{pn}}{e(k - m\omega^2)} = \arccos\frac{500\ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} + 50\ \mathrm{N}}{0{,}02\ \mathrm{m} \cdot (500\ \mathrm{N/m} - 5\ \mathrm{kg} \cdot (10\pi\ \mathrm{rad/s})^2)}$$
$$= 2{,}314\ \mathrm{rad} = 132{,}6°.$$

Pri zasuku odmične krivulje $\phi_{F^P=0} = 132{,}6°$ se kontakt prekine in odmična krivulja ne more več vplivati na gibanje slednika, do ponovne vzpostavitve kontakta pa se slednik ne giblje več v skladu z želeno zakonitostjo.

Ob nespremenjeni obliki odmične krivulje in hitrosti obratovanja mehanizma lahko na povečanje kontaktne sile vplivamo s povečanjem togosti pritisne vzmeti in sile prednapetja, vendar se s tem povečajo tudi obremenitve sestavnih delov mehanizma ter potrebna pogonska moč. Po drugi strani lahko z zmanjšanjem mase slednika in z nižjo hitrostjo obratovanja prispevamo k manjši vztrajnosti gibanja slednika, ki tako bolje sledi odmični krivulji.

Sedaj poiščemo največjo kotno hitrost ω, ki jo geometrijskih in masnih parametrih mehanizma še prenese dani mehanizem (slika 49), da se kontakt med slednikom in odmično krivuljo ne prekine, pri čemer mora za kontaktno silo veljati:

$$F^P = e(m\omega^2 - k)\cos\omega t + ke + F_{pn} > 0.$$

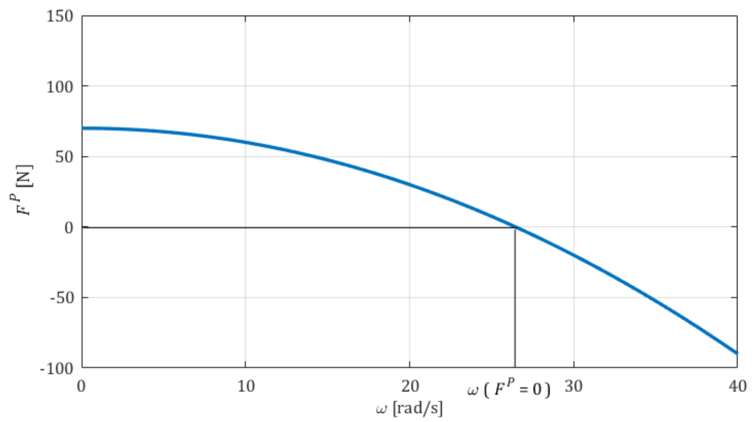
V danem primeru bo minimum kontaktne sile nastopil pri $\cos\omega t = -1$ oz. pri $\phi = \pi$, kjer nastopi tudi največji negativni pospešek (slika 47), in bo pri kotni hitrosti ω znašal:

$$\min F^P = e(k - m\omega^2) + ke + F_{pn},$$

iz česar poiščemo kritično kotno hitrost:

$$\omega_{F^P=0} = \sqrt{\frac{2ke + F_{pn}}{em}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500\ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} + 50\ \mathrm{N}}{0{,}02\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{kg}}} = 26{,}46\ \ \mathrm{rad/s},$$

kar za dani mehanizem predstavlja zgornjo mejo dopustnega območja za obratovalno hitrost, pri katerem je zagotovljen kontakt med slednikom in odmično krivuljo (slika 49).



Slika 49. Minimum kontaktne sile (pri pogoju $\cos\omega t = -1$) v odvisnosti od hitrosti obratovanja.

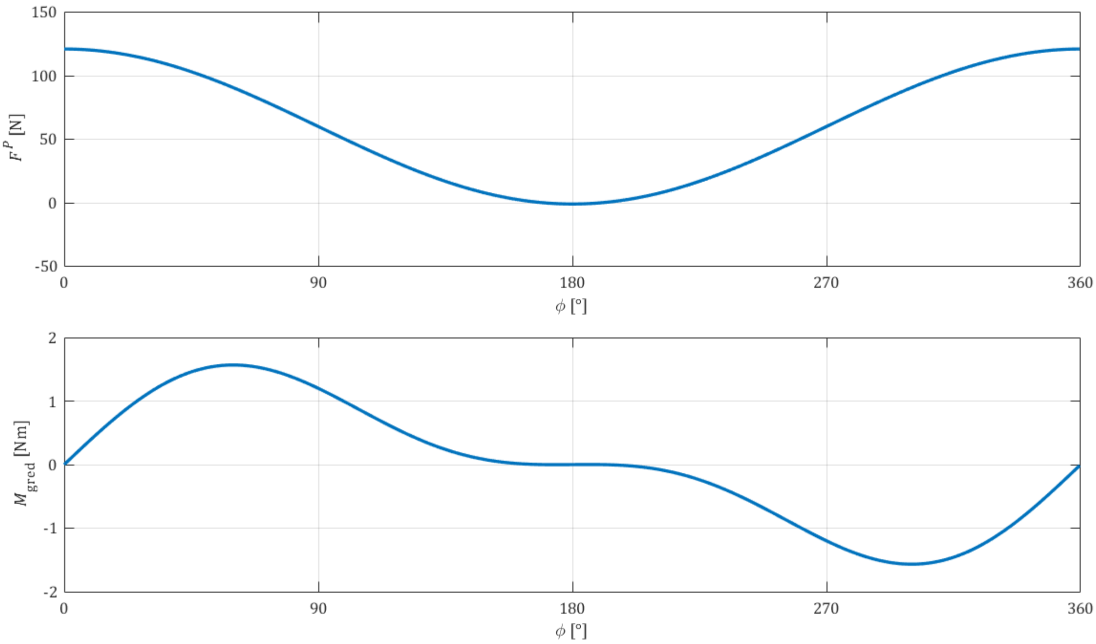
Na pogonski moment na gredi z odmično krivuljo v odvisnosti od zasuka odmične krivulje ϕ vplivata velikost kontaktne sile F^P in trenutna ekscentričnost kontaktne točke glede na os gredi, $e\sin\phi$:

$$M_{\mathrm{gred}} = F^P e\sin\phi = \left[e(m\omega^2 - k)\cos\phi + ke + F_{pn}\right]e\sin\phi$$
$$= \frac{e^2}{2}(m\omega^2 - k)\sin 2\phi + e\left(ke + F_{pn}\right)\sin\phi.$$

Za predhodno izračunano kritično kotno hitrost gredi z odmično krivuljo, $\omega_{F^P=0} = 26{,}46\ \ \mathrm{rad/s}$, in z upoštevanjem danih podatkov dobimo moment na gredi v odvisnosti od zasuka ϕ:

$$M_{\mathrm{gred}}(\phi) = \frac{(0{,}02\ \mathrm{m})^2}{2} \cdot (5\ \mathrm{kg} \cdot (26{,}46\ \ \mathrm{rad/s})^2 - 500\ \ \mathrm{N/m})\sin 2\phi$$
$$+0{,}02\ \mathrm{m} \cdot (500\ \ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} + 50\ \mathrm{N})\sin\phi$$
$$= (0{,}6 \cdot \sin 2\phi + 60 \cdot \sin\phi)\ [\mathrm{Nm}].$$

Potek kontaktne sile in momenta na gredi z odmično krivuljo pri kotni hitrosti $\omega = 26{,}46\ \mathrm{rad/s}$, pri kateri še ne pride do prekinitve kontakta med slednikom in odmično krivuljo, prikazuje slika 50.



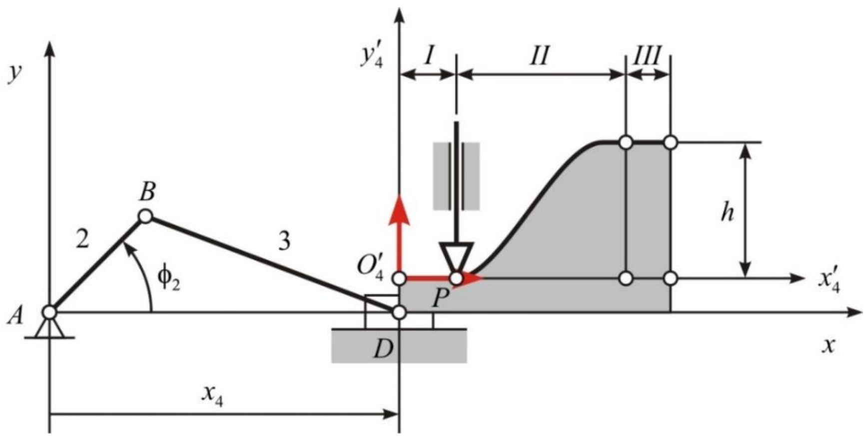
Slika 50. Potek kontaktne sile in momenta na gredi pri kotni hitrosti $\omega = 26{,}46\ rad/s.$

Zgled 17: Odmična zagozda s točkovnim slednikom

Dan je ročični mehanizem (slika 51). Dolžina pogonske ročice 2 je $l_2 = 200$ mm, kotna hitrost pogonske ročice 2 je konstantna, $\omega_2 = 2\pi$ rad/s. Dolžina vezne ročice 3 je $l_3 = 400$ mm. Na drsnik 4 je pritrjena odmična krivulja, ki vodi slednik s točkovnim dotikom, katerega hod je $h = 50$ mm. Gibanje slednika ima naslednje faze:

- faza I: mirovanje spodaj: $0 \leq \phi_2 < \pi/4$,
- faza II: dvig (spust pri povratnem gibu): $\pi/4 \leq \phi_2 < 3\pi/4$,
- faza III: mirovanje zgoraj: $3\pi/4 \leq \phi_2 < \pi$.

Določite obliko odmične krivulje tako, da za obliko zagozde med fazo II uporabite sinusno funkcijo.



Slika 51. Odmična zagozda s točkovnim slednikom.

Rešitev

Izhodišče nepomičnega koordinatnega sistema s koordinatnima osema x in y je v točki A, zaradi lažje obravnave pa je drsniku 4 pridružen lokalni koordinatni sistem z osema x'_4 in y'_4 ter izhodiščem v točki O'_4 na začetku odmične zagozde (slika 51).

Pomik drsnika dobimo s pomočjo trigonometričnih relacij med pogonsko ročico 2, vezno ročico 3 in smerjo gibanja drsnika 4, pri čemer izhajamo iz y-koordinate točke B:

$$x_4 = l_2 \cos\phi_2 + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2\phi_2}.$$

Faze gibanja mehanizma so opredeljene z zasukom pogonske ročice 2, od katerega je odvisen translatorni pomik drsnika 4. Z upoštevanjem enačbe za pomik je lega drsnika v mejnih točkah faz, odmerjena glede na nepomični koordinatni sistem:

$$x_4(\phi_2 = 0) = l_2 \cos 0 + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 (\sin 0)^2} = l_2 + l_3 = 600\ \text{mm},$$

$$x_4\left(\phi_2 = \frac{\pi}{4}\right) = l_2 \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 (\sin\frac{\pi}{4})^2} = 515{,}6\ \text{mm},$$

$$x_4\left(\phi_2 = \frac{3\pi}{4}\right) = l_2 \cos\frac{3\pi}{4} + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 (\sin\frac{3\pi}{4})^2} = 232{,}7\ \text{mm},$$

$$x_4(\phi_2 = \pi) = l_2 \cos\pi + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 (\sin\pi)^2} = l_3 - l_2 = 200\ \text{mm}.$$

Predpisano zakonitost gibanja slednika moramo realizirati z ustreznim oblikovanjem odmične zagozde. Zato je treba mejne točke faz izraziti v lokalnem koordinatnem sistemu odmične zagozde, nato pa med mejnimi točkami oblikovati zagozdo za posamezne faze gibanja I, II in III.

Delovno območje drsnika obsega pomik med dvema skrajnima legama, ki se vzpostavi ob kolinearnosti pogonske in vezne ročice:

$$\Delta x_{4,max} = x_4(\phi_2 = 0) - x_4(\phi_2 = \pi) = 2l_2 = 400\ \text{mm}.$$

Mejne točke faz v lokalnem koordinatnem sistemu drsnika – odmične krivulje (slika 52):

$$x'_{4,\phi_2=0} = 0\ \text{mm},$$

$$x'_{4,\phi_2=\frac{\pi}{4}} = x_4(\phi_2 = 0) - x_4\left(\phi_2 = \frac{\pi}{4}\right) = 600\ \text{mm} - 515{,}6\ \text{mm} = 84{,}4\ \text{mm},$$

$$x'_{4,\phi_2=\frac{3\pi}{4}} = x_4(\phi_2 = 0) - x_4\left(\phi_2 = \frac{3\pi}{4}\right) = 600\ \text{mm} - 232{,}7\ \text{mm} = 367{,}3\ \text{mm},$$

$$x'_{4,\phi_2=\pi} = x_4(\phi_2 = 0) - x_4(\phi_2 = \pi) = 600\ \text{mm} - 200\ \text{mm} = 400\ \text{mm}.$$

V fazi dviga (II) pogonska ročica 2 opravi zasuk med $\phi_2 = \pi/4$ in $\phi_2 = 3\pi/4$, pri čemer je slednik v stiku z drsnikom (odmično zagozdo) med začetno in končno točko na odmični zagozdi, ki omejujeta fazo II (slika 52):

$$x'_{4,\phi_2=\frac{\pi}{4}} \leq x'_4 < x'_{4,\phi_2=\frac{3\pi}{4}},$$

med katerima ima odmična zagozda zahtevano obliko sinusne funkcije:

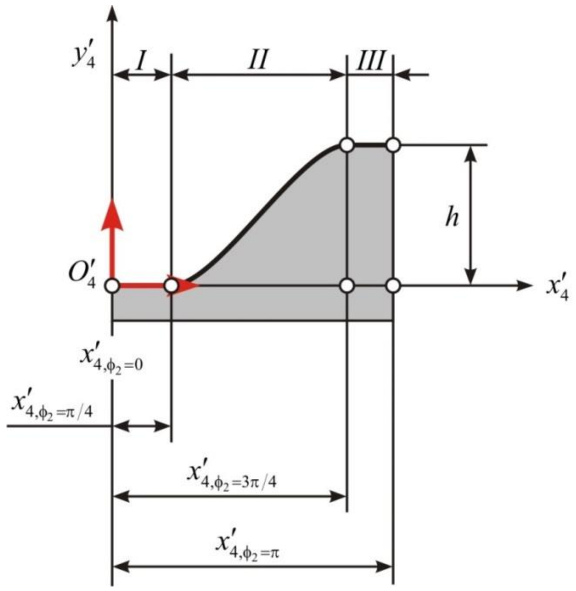
$$y'_{4,II}(x'_4) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{x'_4 - x'_{4,\phi_2=\pi/4}}{x'_{4,\phi_2=3\pi/4} - x'_{4,\phi_2=\pi/4}}\pi\right)$$

$$= \frac{50\text{ mm}}{2}\cdot\left(1 - \cos\frac{x'_4 - 84{,}4\text{ mm}}{367{,}3\text{ mm} - 84{,}4\text{ mm}}\pi\right),$$

za spodnjo (I) in zgornjo (III) fazo mirovanja pa je kontura zagozde vodoravna linija:

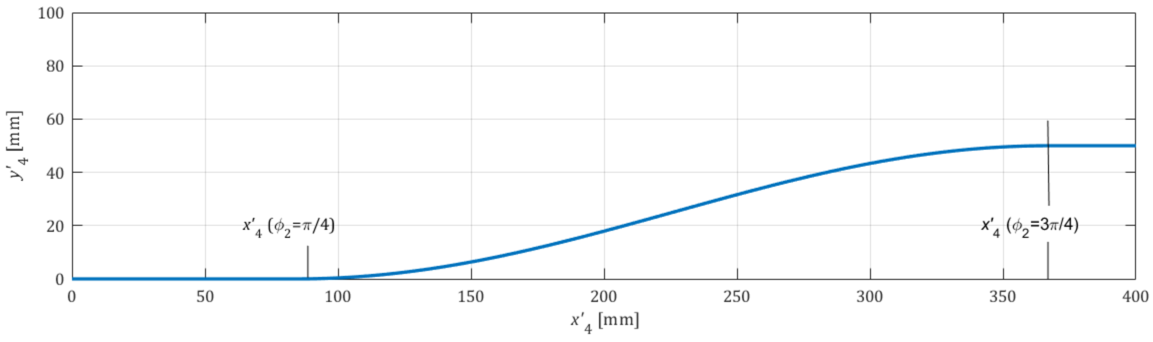
$$y'_{4,I}(x'_4) = 0\text{ mm},\quad 0 \le x'_4 < x'_{4,\phi_2=\frac{\pi}{4}},$$

$$y'_{4,III}(x'_4) = 50\text{ mm},\quad x'_{4,\phi_2=\frac{3\pi}{4}} \le x'_4 < x'_{4,\phi_2=\pi}.$$



Slika 52. Mejne točke faz gibanja na odmični zagozdi.

Zaradi spremenljive geometrije ročičnega mehanizma pri gibanju drsnik 4 z odmično zagozdo med spodnjo fazo mirovanja (I) opravi drugačen pomik kot med zgornjo fazo mirovanja (III). Zato se dolžina konture odmične zagozde v spodnji fazi mirovanja (I) razlikuje od dolžine konture v zgornji fazi mirovanja (III) in sinusna oblika konture za fazo dviga (II) ni umeščena simetrično med začetno in končno točko na odmični zagozdi (slika 53).



Slika 53. Kontura odmične zagozde.

Iz začetne kolinearne lege pogonske in vezne ročice pri $\phi_2 = 0$, kjer pomik drsnika doseže največjo vrednost $x_4(\phi_2 = 0) = 600$ mm, se drsnik 4 pomika v negativni smeri koordinatne osi x oz. se pomik x_4 zmanjšuje do druge kolinearne lege pri $\phi_2 = \pi$. Relativni pomik drsnika v vodoravni smeri v odvisnosti od zasuka pogonske ročice je:

$$x'_4(\phi_2) = x_4(\phi_2 = 0) - x_4(\phi_2) = 600 - x_4(\phi_2),$$

kjer je lega drsnika 4 ročičnega mehanizma:

$$x_4(\phi_2) = l_2 \cos\phi_2 + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2\phi_2}\,,$$

ki jo vstavimo v predhodno izpeljano enačbo za sinusno obliko odmične zagozde v fazi dviga II in po ureditvi dobimo pomik slednika pri dvigu:

$$s_{II}(\phi_2) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{x'_4(\phi_2) - x'_{4,\phi_2=\pi/4}}{x'_{4,\phi_2=3\pi/4} - x'_{4,\phi_2=\pi/4}}\pi\right) = \frac{50\text{ mm}}{2} \cdot \left(1 - \cos\frac{515{,}6\text{ mm} - x_4(\phi_2)}{282{,}9\text{ mm}}\pi\right).$$

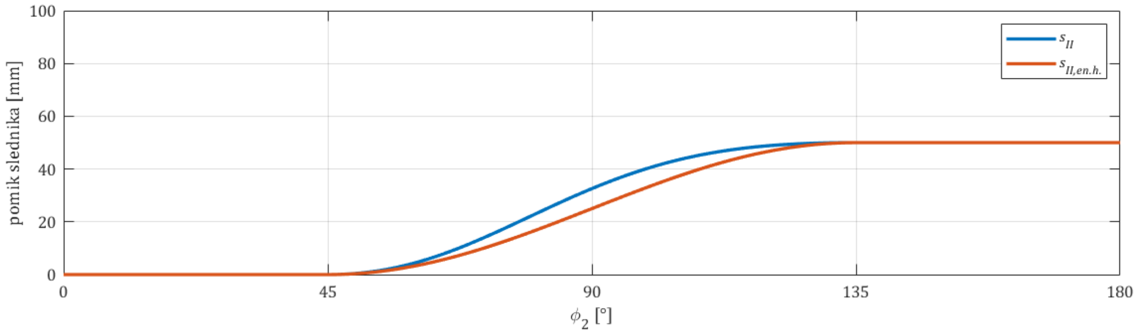
Pomik drsnika z odmično zagozdo v vodoravni smeri, $x_4(\phi_2)$, ni linearno odvisen od zasuka pogonske ročice 2, ϕ_2, oz. se pri konstantni kotni hitrosti ročice spreminja hitrost drsnika. Zato dejansko gibanje slednika malce odstopa od definicije enostavnega harmoničnega gibanja, ki predpostavlja konstantno (translatorno ali kotno) hitrost odmičnega elementa – v tem primeru zagozde, kljub sinusni obliki konture zagozde za fazo dviga. Za doseganje sinusnega gibanja slednika bi bilo treba neenakomerno translatorno hitrost zagozde kompenzirati z dodatno prirejeno obliko odmične krivulje.

V skladu z definicijo enostavnega harmoničnega gibanja je pomik slednika pri dvigu, v odvisnosti od zasuka pogonske ročice:

$$s_{II,en.h.}(\phi_2) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{\theta_{II}}{\beta_{II}}\right) = \frac{50\text{ mm}}{2} \cdot (1 - \cos(2\phi_2 - \pi/2)),$$

kjer smo za dani primer upoštevali zasuk pogonske ročice 2 pri začetku faze dviga, $\theta_{II} = \phi_2 - \pi/4$, in trajanje faze, $\beta_{II} = \pi/2$.

Slika 54 prikazuje primerjavo pomika slednika pri sinusni obliki konture zagozde in pri gibanju po enostavni harmonični zakonitosti.



Slika 54. Primerjava pomika slednika za fazo dviga II pri sinusni obliki konture odmične zagozde, $s_{II}(\phi_2)$, in pri enostavnem harmoničnem gibanju, $s_{II,en.h.}(\phi_2)$.

E. Sinteza

Zgled 18: Sinteza štirizgibnega mehanizma za delovno območje

Sestavite štirizgibni mehanizem, kjer ima nihajna ročica 4 dolžine $l_4 = 0{,}3$ m delovno območje 60°. Vezna ročica 3 naj ima dolžino $l_3 = 0{,}8$ m. Čas delovnega giba naj bo enak času povratnega giba, pri čemer se ročica 2 vrti s konstantno kotno hitrostjo ω_2 v protiurni smeri. Preverite, ali mehanizem izpolnjuje Grashofov kriterij.

Rešitev

Gre za primer sinteze štirizgibnega mehanizma, ko je podano delovno območje gnane ročice. V splošnem formulacija naloge sinteze mehanizma dopušča širok spekter rešitev. Nekatere količine (mere, vpetja ročic, …), ki niso podane v okviru zahtev, je zato treba izbrati ob upoštevanju različnih dejavnikov, npr. lego fiksne ročice, velikost prostora, ki ga mehanizem zavzema itd.

Za skrajno lego I velja

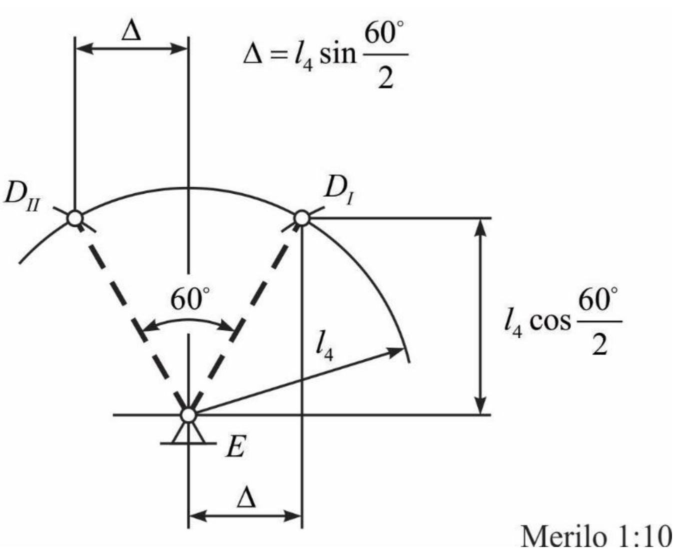
$$\overline{AB_I} + \overline{B_I D_I} = l_3 + l_2.$$

Za skrajno lego II velja

$$\overline{B_{II} D_{II}} - \overline{AB_{II}} = l_3 - l_2.$$

Enačbi odštejemo in razliko odmerimo s slike (slika 55):

$$(I) - (II) \quad \Rightarrow \quad l_2 = \Delta.$$



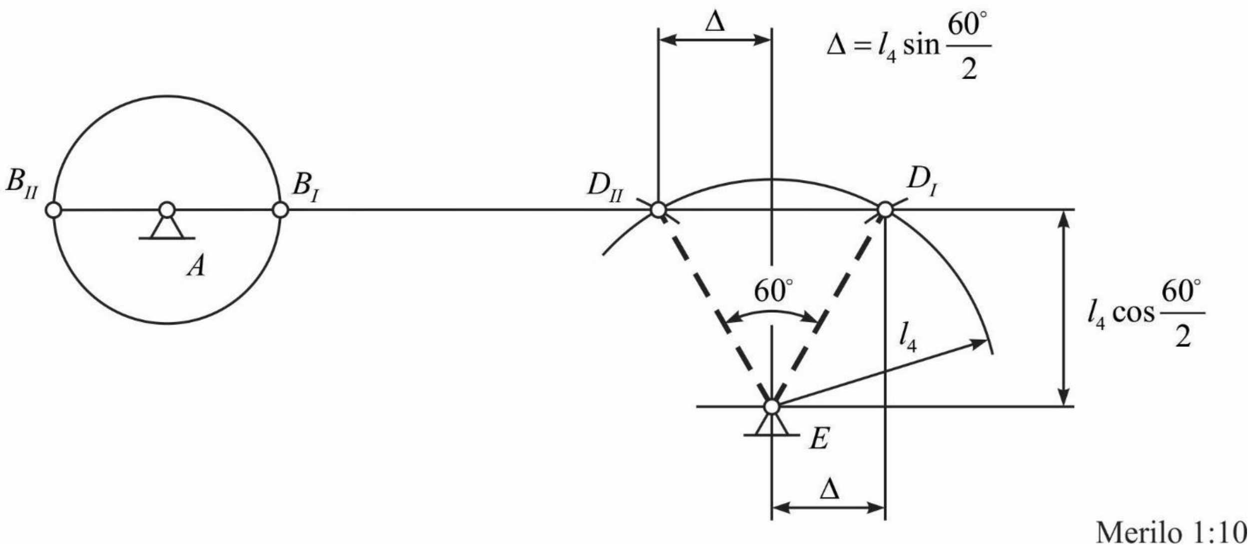
Slika 55. Delovno območje ročice 4.

V mrtvih legah sta ročici 2 in 3 kolinearni, upoštevamo tudi zahtevo, da delovni in povratni gib trajata enako dolgo oz. je razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba $Q = 1$. To pomeni, da daljico $\overline{D_I D_{II}}$ podaljšamo, saj bo na njej ležala točka vpetja A ročice 2. Dolžino ročice 2 dobimo iz pogoja

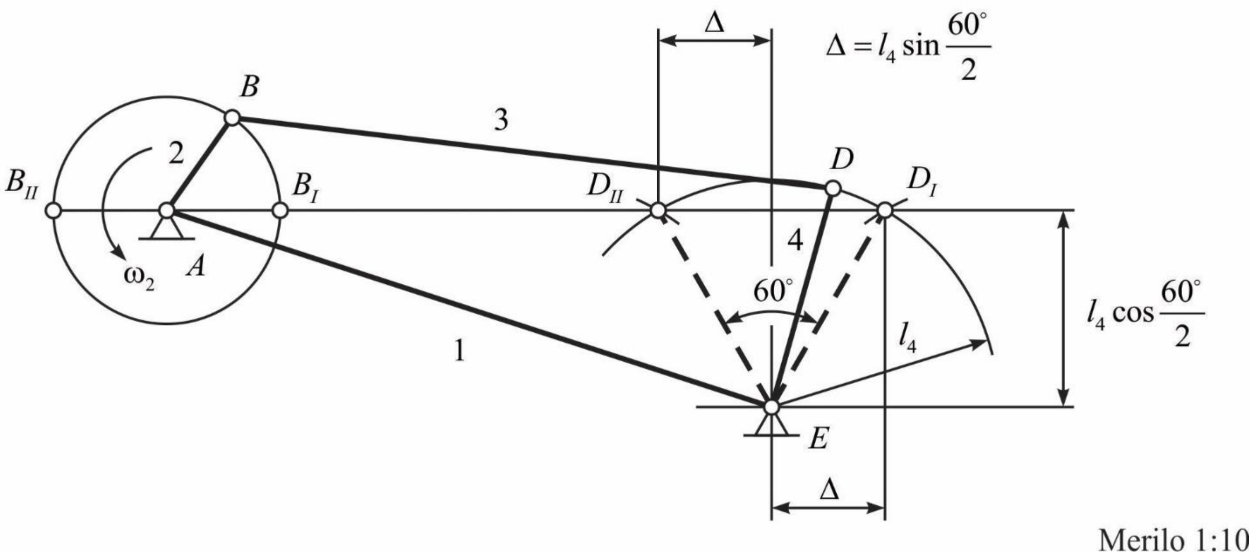
$$\Delta = l_4 \sin\frac{60^\circ}{2} = l_2 = 0{,}15 \text{ m}.$$

Dolžina ročice 2 je $l_2 = 0{,}15\ \mathrm{m}$. Dolžino nepomične ročice 1 odmerimo grafično ali izračunamo (slika 56):

$$l_1 = \sqrt{l_3^2 + \left(l_4 \cos\frac{60°}{2}\right)^2} = \sqrt{(0{,}8\ \mathrm{m})^2 + \left(0{,}3\ \mathrm{m} \cdot \cos\frac{60°}{2}\right)^2} \approx 0{,}841\ \mathrm{m}.$$



Slika 56. Dodana pogonska in vezna ročica.



Slika 57. Rešitev za sintezo štirizgibnega mehanizma.

V splošnem je treba Grashofov kriterij preveriti, saj lahko glede na zahteve dobimo rešitev, pri kateri gibljivost mehanizma v mejah delovnega območja ni zagotovljena:

$(s + l) \leq (p + q)$, s … dolžina najkrajše ročice, l … dolžina najdaljše ročice,

$(l_2 + l_1) \leq (l_3 + l_4)$,

$\big(0{,}15\ \mathrm{m} + 0{,}841\ \mathrm{m}\ (= 0{,}991\ \mathrm{m})\big) \leq \big(0{,}8\ \mathrm{m} + 0{,}3\ \mathrm{m}\ (= 1{,}1\ \mathrm{m})\big).$

Mehanizem na sliki 57 izpolnjuje Grashofov kriterij, zato je gibljiv na celotnem delovnem območju.

Zgled 19: Nadaljevanje – sinteza štirizgibnega mehanizma s spremembo vpetja

Obstoječi mehanizem (slika 57) modificirajte tako, da premaknete točko vpetja A na višino točke vpetja E: $A \rightarrow A^*$. Pri tem ustrezno prilagodite dolžino ročic 2 ($l_2 \rightarrow l_2^*$) in 3 ($l_3 \rightarrow l_3^*$), tako da bo delovno območje nihajne ročice 4 ostalo nespremenjeno. Kakšno je razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba?

Rešitev

Gre za nadaljevanje Zgleda 18, pri čemer spremenimo lego ene rotacijske vezi in dolžino ročic 2 in 3. Opazujemo vpliv na razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba.

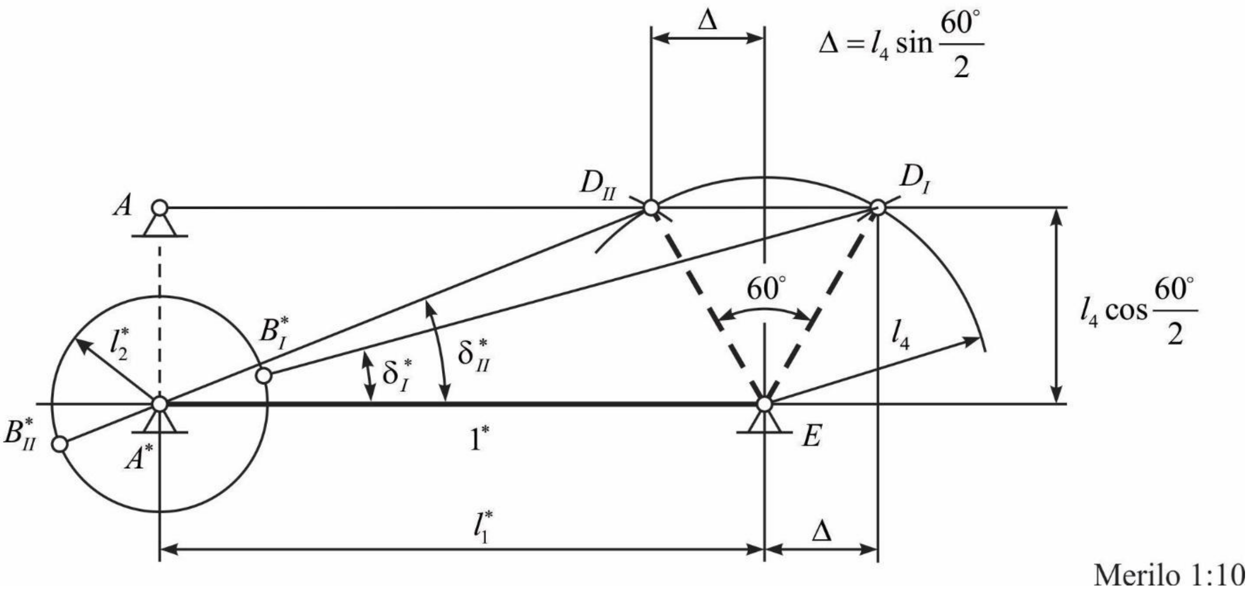
Točko A premaknemo po navpičnici na višino točke E (slika 58). Delovno območje nihajne ročice 4 se mora ohraniti, zato točki D_I, D_{II} ostaneta na svojem mestu. Dolžini ročic 2 in 3 se morata zato spremeniti, pri čemer izhajamo iz kolinearnosti ročic 2 in 3 v skrajnih legah I in II:

$$I: \quad \overline{A^*D_I} = l_2^* + l_3^* = \sqrt{(l_1^* + \Delta)^2 + \left(l_4 \cos\frac{60°}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}8\ \text{m} + 0{,}15\ \text{m})^2 + (0{,}3\ \text{m} \cdot \cos\frac{60°}{2})^2} \approx 0{,}985\ \text{m}.$$

$$II: \quad \overline{A^*D_{II}} = l_3^* - l_2^* = \sqrt{(l_1^* - \Delta)^2 + \left(l_4 \cos\frac{60°}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}8\ \text{m} - 0{,}15\ \text{m})^2 + \left(0{,}3\ \text{m} \cdot \cos\frac{60°}{2}\right)^2} = 0{,}7\ \text{m}.$$

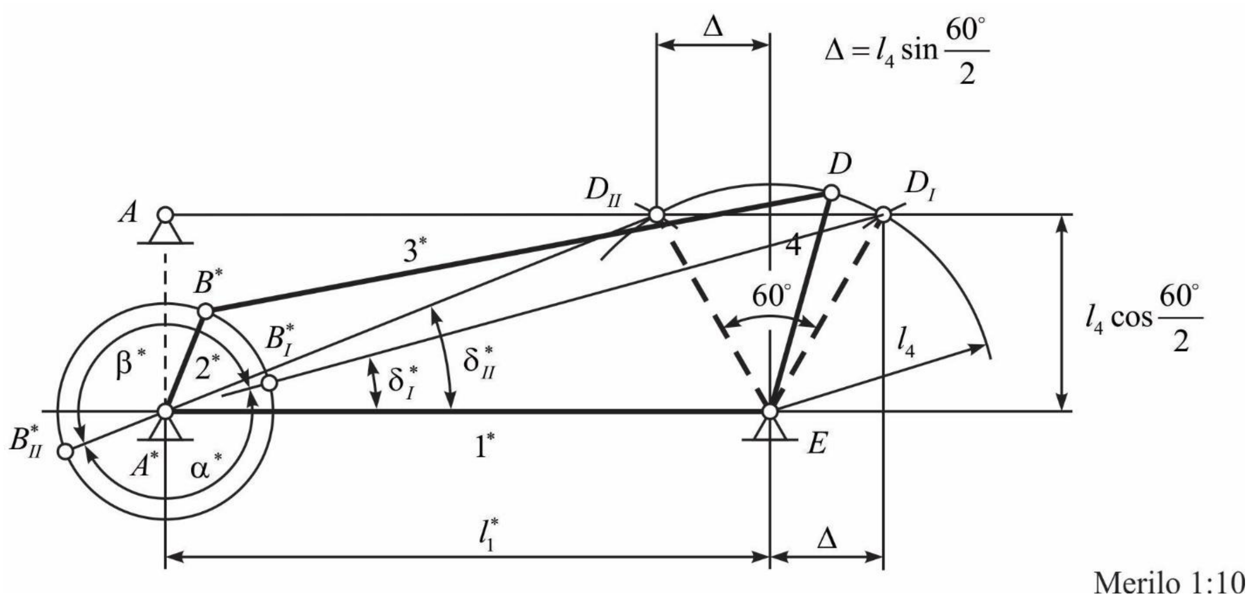


Slika 58. Premik vpetja pogonske ročice.

Upoštevali smo dejstvo, ki sledi iz geometrije mehanizma po premiku točke A: $l_1^* = 0{,}8$ m.

Z upoštevanjem dveh zgornjih pogojev kolinearnosti v legah I in II, ki tvorita sistem dveh enačb z dvema neznankama, izrazimo iskani dolžini ročic 2 in 3:

$$l_3^* - l_2^* = \overline{A^*D_{II}}, \quad l_2^* + l_3^* = \overline{A^*D_I} \quad \Rightarrow \quad l_2^* \approx 0{,}143\ \text{m}, \quad l_3^* \approx 0{,}843\ \text{m}.$$



Slika 59. Sinteza z upoštevanjem spremenjene lege vpetja ročice 2.

Za določitev delovnega in povratnega giba oz. kotov α^*, β^* uvedemo pomožna kota $\delta_I^*, \delta_{II}^*$, ki ju izrazimo iz geometrijskih pogojev (slika 59):

$$\delta_I^* = \arctan\frac{l_4 \cos\frac{60°}{2}}{l_1^* + \Delta} = \arctan\frac{0{,}3\ \text{m}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}8\ \text{m} + 0{,}15\ \text{m}} = 15{,}3°,$$

$$\delta_{II}^* = \arctan\frac{l_4 \cos\frac{60°}{2}}{l_1^* - \Delta} = \arctan\frac{0{,}3\ \text{m}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}8\ \text{m} - 0{,}15\ \text{m}} = 21{,}8°.$$

Iz slike 59 sta razvidni naslednji relaciji:

$$\alpha^* = 180° - \delta_I^* + \delta_{II}^* = 186{,}5°,$$

$$\beta^* = 180° - \delta_{II}^* + \delta_I^* = 360° - \alpha^* = 173{,}5°.$$

Razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba za modificirani mehanizem je:

$$Q^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*} = \frac{186{,}5°}{173{,}5°} = 1{,}08.$$

Zaradi gibljivosti mehanizma preverimo še Grashofov kriterij:

$$s + l \le p + q,$$

$$l_2^* + l_3^* \le l_1^* + l_4,$$

$$(0{,}143\ \text{m} + 0{,}843\ \text{m}(\approx 0{,}986\ \text{m})) \le (0{,}8\ \text{m} + 0{,}3\ \text{m})\ (= 1{,}1\ \text{m})),$$

ki je tudi pri modificirani izvedbi izpolnjen.

V tem primeru smo spremenili geometrijo mehanizma in ugotavljali vpliv spremembe na bistvene parametre delovanja, npr. razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba Q. V kolikor pa je razmerje med trajanjem predpisano, pa moramo najprej določiti razliko kotov $\delta_{II}^{*} - \delta_{I}^{*}$ in nato izbrati ustrezno lego vpetja pogonske ročice.

Za primer, ko je zahtevano razmerje med trajanjem delovnega in povratnega giba Q =1.25, lahko izrazimo zasuka α in β, ki ju pogonska ročica 2 opravi med delovnim in povratnim gibom in skupaj predstavljata en delovni cikel pri kontinuiranem obratovanju:

$$Q = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha + \beta = 360° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 200°, \quad \beta = 160°$$

in razlika kotov $\delta_{II} - \delta_{I}$ znaša:

$$\delta_{II} - \delta_{I} = \alpha - 180° = 180° - \beta = 20°.$$

Izberemo premico od točke D_I in jo usmerimo približno proti želeni legi točke$A$, kjer je predvideno vpetje pogonske ročice (slika 60 levo). Nato skozi točko D_{II} določimo premico pod kotom $\delta_{II} - \delta_{I}$ glede na prvo premico. Na presečišču premic je točka A, za dve kolinearni legi pogonske in vezne ročice pa lahko za dani primer (Zgled 18, Zgled 19) grafično ali računsko določimo razdalji $\overline{AD_I} = 0{,}274$ m in $\overline{AD_{II}} = 0{,}543$ m. Iz dveh pogojev kolineacije izračunamo dolžino pogonske in vezne ročice ter ob upoštevanju dolžine ročice 4 dobimo:

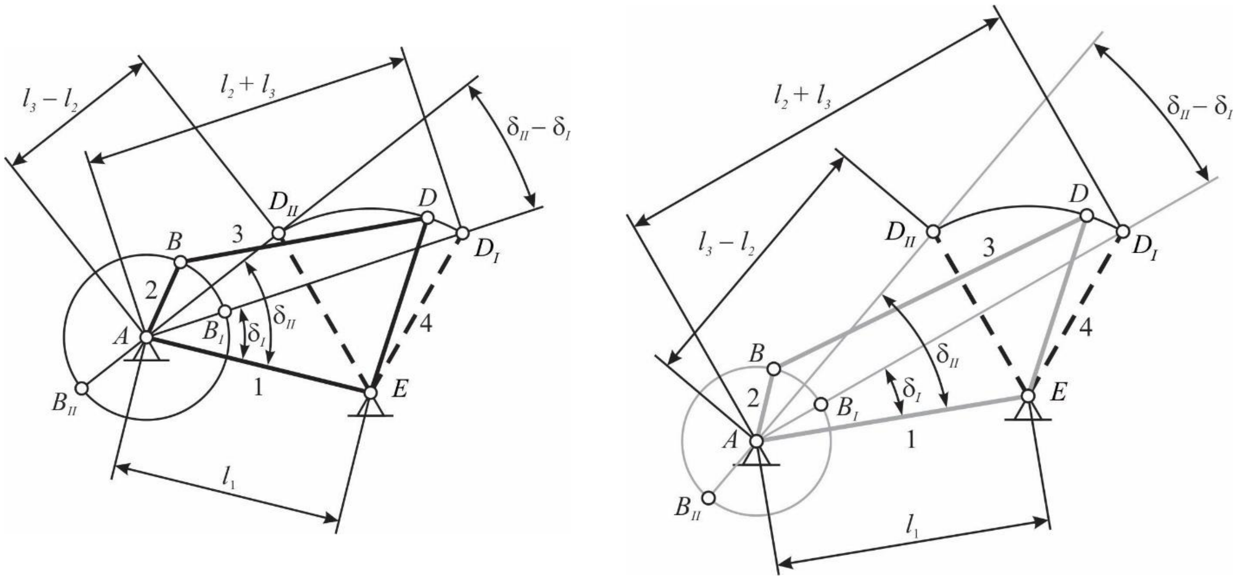
$$l_3 - l_3 = \overline{AD_{II}}, \quad l_2 + l_3 = \overline{AD_I} \quad \Rightarrow \quad l_2 = 0{,}135 \text{ m}, \quad l_3 = 0{,}409 \text{ m},$$

dolžina nepomične ročice 1 pa določena grafično ali računsko znaša $l_1 = 0{,}376$ m.

Preverjanje Grashofovega pogoja kaže, da dobljena rešitev omogoča zasuk pogonske ročice 2 za 360° in s tem kontinuirano obratovanje mehanizma:

$$(s + l) \leq (p + q),$$
$$(l_2 + l_3) \leq (l_1 + l_4),$$
$$\big(0{,}135 \text{ m} + 0{,}409 \text{ m} (= 0{,}544 \text{ m})\big) \leq \big(0{,}376 \text{ m} + 0{,}3 \text{ m} (= 0{,}676 \text{ m})\big).$$

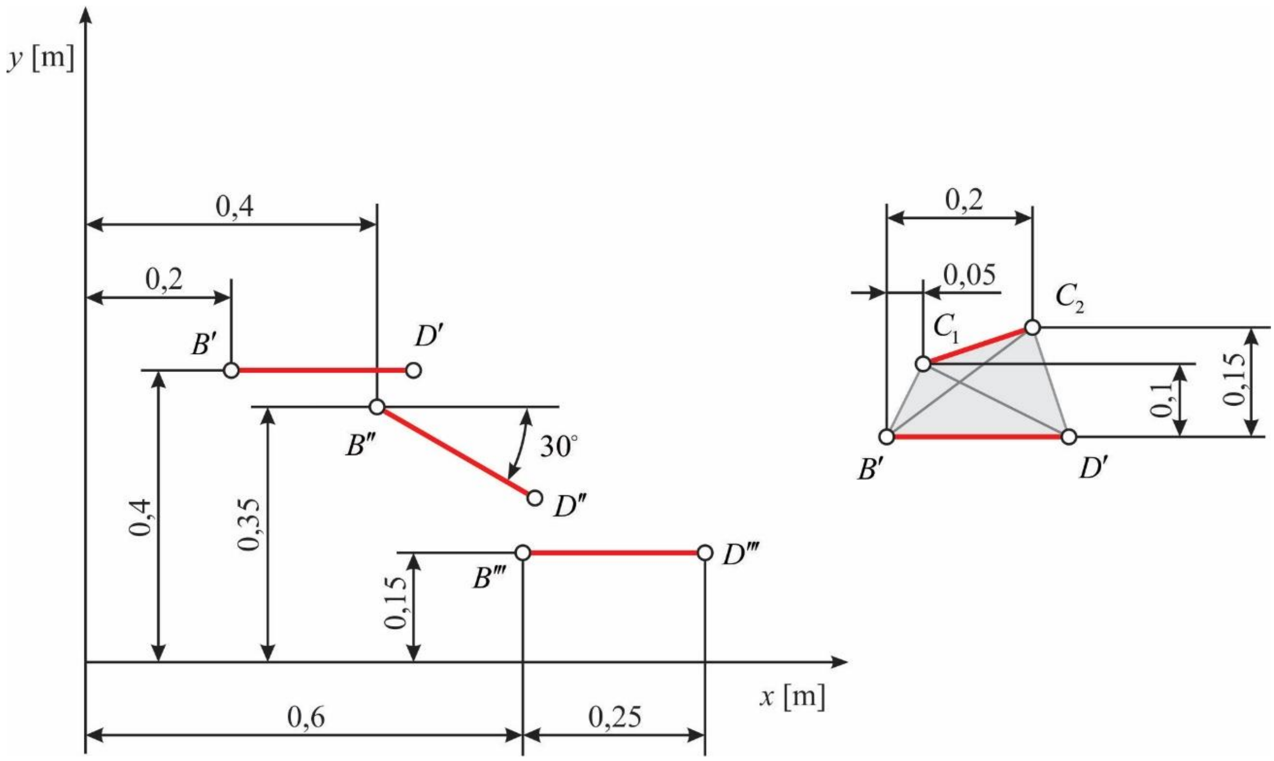
Povsem možno je, da v prvem koraku rešitev ni najustreznejša, zato postopek iterativno ponovimo, dokler ne pridemo do zadovoljive rešitve. Pri enakih zahtevah glede delovnega območja in razmerja med trajanjem delovnega in povratnega giba lahko z drugačno orientacijo premice skozi D_I na začetku postopka prilagodimo lego vpetja pogonske ročice A in s tem vplivamo na dimenzijsko ustreznejšo izvedbo in ugodnejši prenos obremenitev v mehanizmu (slika 60 desno).



Slika 60: Sinteza štirizgibnega mehanizma pri predpisanem razmerju trajanja delovnega in povratnega giba, pri čemer so možne različne rešitve glede na izbiro lege vpetja pogonske ročice.

Zgled 20: Enostavna tripoložajna sinteza

Dano je gibanje vezne ročice štirizgibnega mehanizma (slika 61). Določite točki vpetja nepomične ročice AE. Določite tudi gibanje točk C_1, C_2, na vezni ročici. Štirizgibnemu mehanizmu dodajte pogonski mehanizem z razmerjem trajanja med delovnim in povratnim gibom $Q = 1{,}33$.

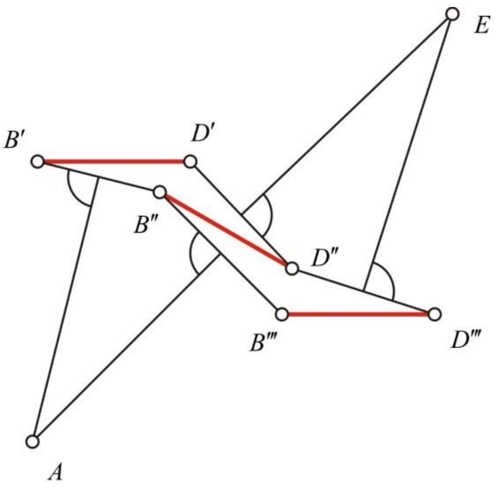


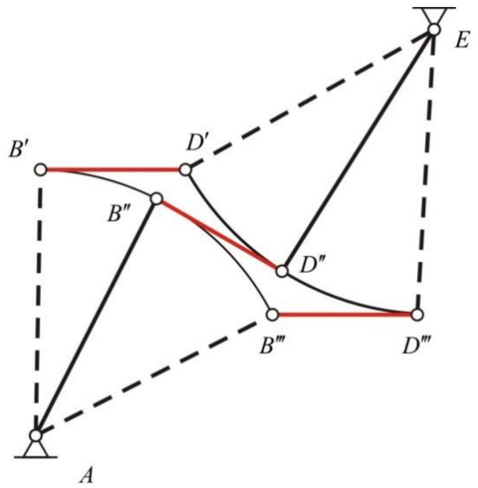
Slika 61. Tri zaporedne lege vezne ročice.

Rešitev

Gre za problem enostavne tripoložajne sinteze mehanizma, kjer so podane tri zaporedne lege, skozi katere mora iti vezna ročica pri obratovanju. Pri rešitvi naloge dobimo enolično določeni vpetji na nepomični ročici, A in E.

Iščemo štirizgibni mehanizem običajne strukture, uporabljene oznake so prav tako običajne (slika 61). Ker sta točki B in D končni točki na vezni ročici 3, morata pri gibanju krožiti okoli še nedoločene točke A oz. B. Ob predpisanih treh zaporednih legah vezne ročice lahko središče kroženja A določimo tako, da z daljico povežemo dve zaporedni legi točke B, ki ležita na isti krožnici, daljico razpolovimo z normalo – bisektorjem in poiščemo presečišče obeh bisektorjev (slika 62). Enako ponovimo pri določanju točke E. Dobimo geometrijo mehanizma, ki izpolnjuje dane zahteve gibanja vezne ročice skozi tri predpisane položaje.

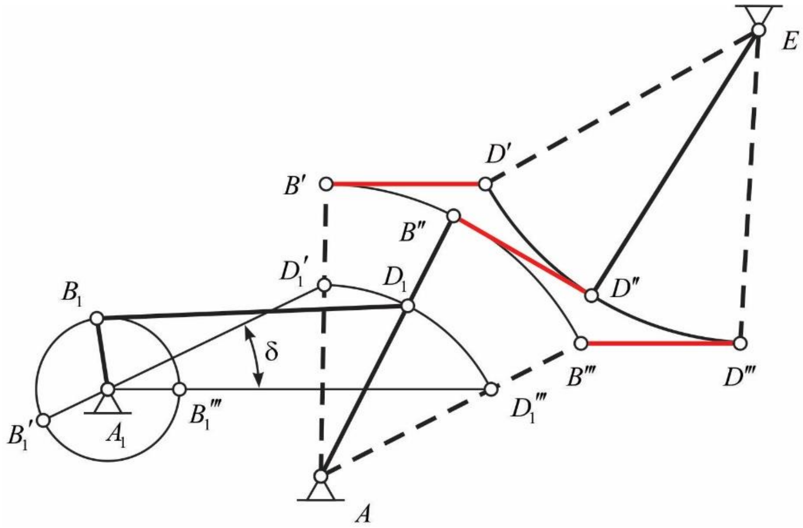




Slika 62. Določitev vpetij nepomične ročice.

Običajno sta prva in zadnja lega definirani kot meji delovnega območja. Za dani primer dobimo nihajoč mehanizem, ki direktno ne omogoča kontinuiranega obratovanja. Za pogon zato dodamo nov štirizgibni mehanizem, ki ga določimo po metodah, pojasnjenih v Zgledih 18 in 19. Izhajamo iz razmerja med trajanjem delovnega in povratnega giba, ob znanem delovnem območju. Določimo razliko kotov (v prejšnjem primeru: $\delta_{II}^{*} - \delta_{I}^{*}$):

$$\delta = 180° \frac{Q-1}{Q+1} = 180° \cdot \frac{1{,}33-1}{1{,}33+1} = 25{,}7°.$$



Slika 63. Dodan pogonski mehanizem.

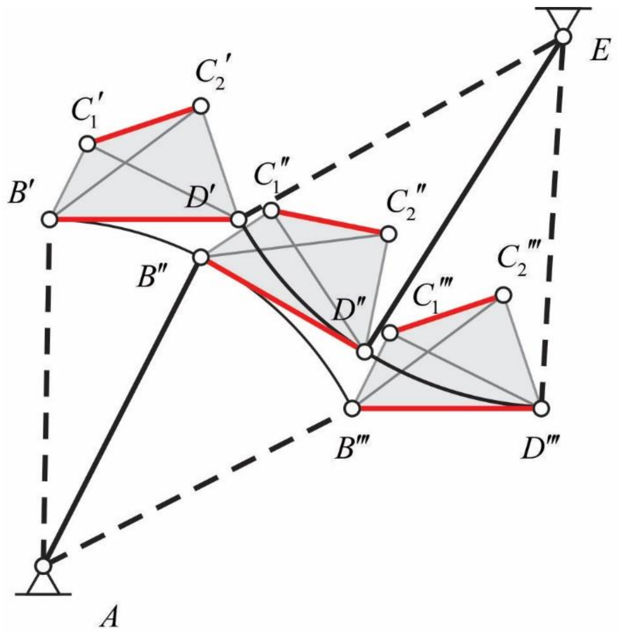
Naj pogonski mehanizem poganja ročico 2 v neki izbrani točki, npr. D_1 (slika 63). Izberemo, načeloma poljubno smer premice skozi D''' proti točki vpetja A_1 pogonske ročice pogonskega mehanizma. V splošnem na izbiro lahko vplivajo različni dejavniki, kot so konstrukcijska izvedljivost povezave med gnanim in pogonskim mehanizmom, velikost potrebnega prostora, prenosne karakteristike pogonskega mehanizma. Od točke D' potegnemo premico pod kotom δ glede na prvo premico skozi D''' in poiščemo presečišče. Nato iz pogojev kolineacije izračunamo dolžino pogonske in vezne ročice pogonskega mehanizma:

$$\overline{A_1D_1'''} = 0{,}602 \text{ m}, \ \overline{A_1D_1'} = 0{,}377 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_1B_1} = 0{,}113 \text{ m}, \quad \overline{B_1D_1} = 0{,}489 \text{ m},$$

medtem ko je dolžina nepomične ročice podana z razdaljo $\overline{AA_1}$:

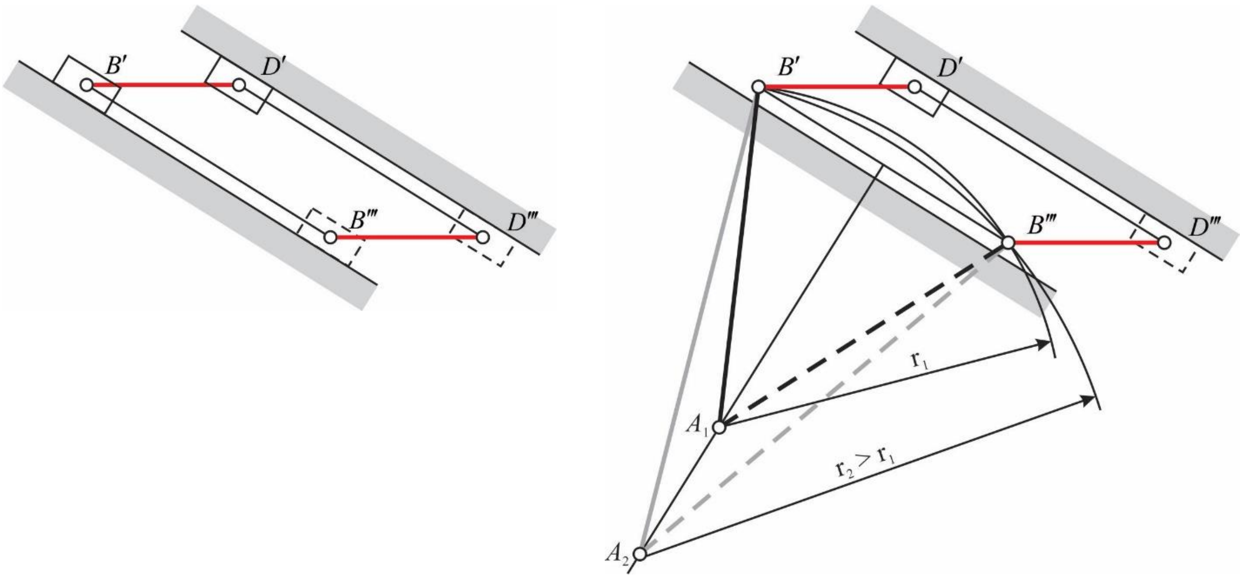
$$\overline{AA_1} = 0{,}361 \text{ m}.$$

Gibanje točk C_1, C_2 na vezni ročici je ob upoštevanju popolne togosti preprosto določljivo, saj se medsebojna lega točk na togem telesu ohranja. Točka C_1 predstavlja oglišče trikotnika BDC_1, točka C_2 pa oglišče trikotnika BDC_2. Oba trikotnika konstruiramo za vsako lego vezne ročice, tako da dobimo gibanje točk C_1 in C_2 (slika 64).



Slika 64. Kontrola rešitve tripoložajne sinteze.

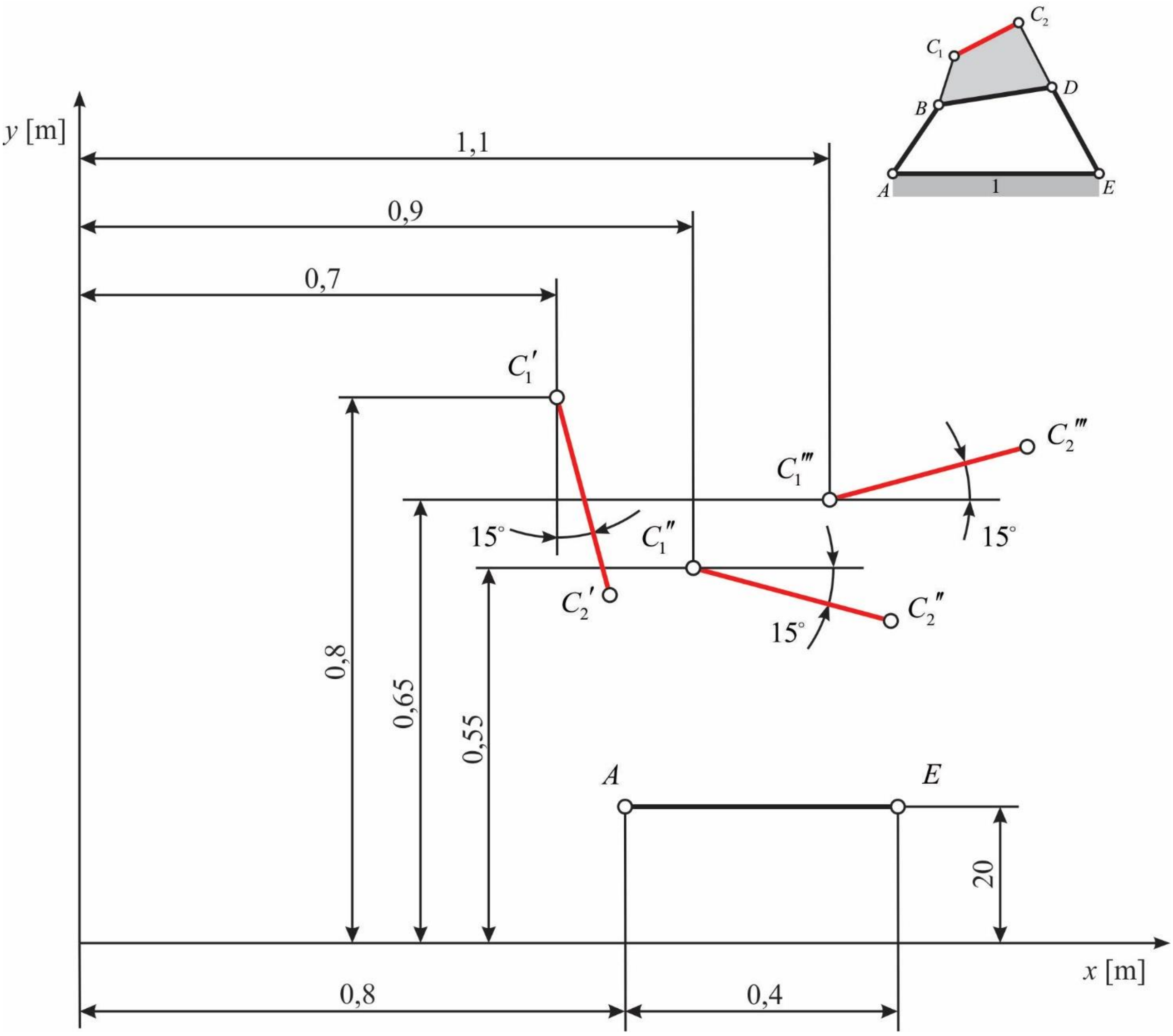
Pri štirizgibnem mehanizmu so ročice medsebojno povezane z rotacijskimi vezmi, zato točki vpetja na vezni ročici, kjer sta z vezno ročico povezani preostali gibljivi ročici, pri gibanju mehanizma opišeta krožnici, katerih središči lahko določimo, če poznamo tri zaporedne položaje vezne ročice in s tem točk vpetja na njej. V kolikor namesto treh predpišemo dva zaporedna položaja, npr. začetno in končno lego (Zgled 20, slika 61), lahko želeno gibanje dosežemo s strukturno in dimenzijsko različnimi izvedbami mehanizma: štirizgibno (slika 64), ročično z drsnikom (slika 65 levo) ali z dvema drsnikoma, povezanima z ročico (slika 65 desno).



Slika 65. Različni izvedbi mehanizmov pri dvopoložajni sintezi zagotavljata enako začetno in končno lego ročice *BD.*

Zgled 21: Tripoložajna sinteza z znano lego nepomične ročice

Na vezni ročici štirizgibnega mehanizma sta dani točki C_1, C_2 z medsebojno oddaljenostjo 0,3 m. Znane so tri zaporedne lege točk C_1 in C_2 na vezni ročici in lega nepomične ročice AE. Določite dolžine preostalih ročic mehanizma (slika 66). Pogon je izveden z dodatnima ročicama, od katerih lahko ena opiše popolno rotacijo, pri čemer znaša razmerje med časom delovnega in povratnega giba $Q = 1$.

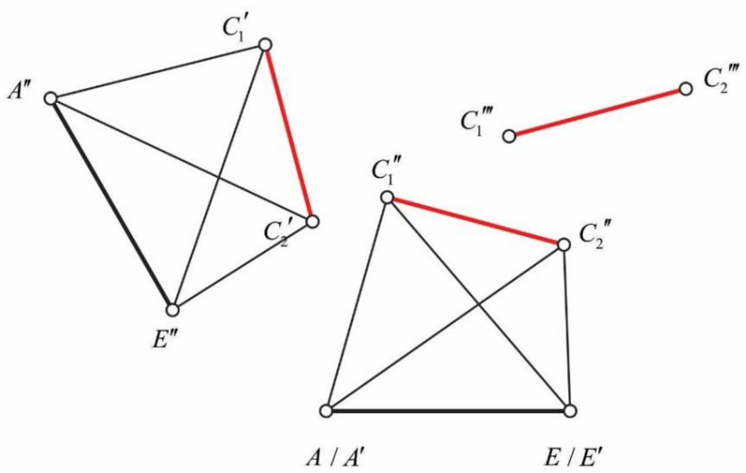


Slika 66. Tri zaporedne lege vezne ročice, predpisana lega nepomične ročice.

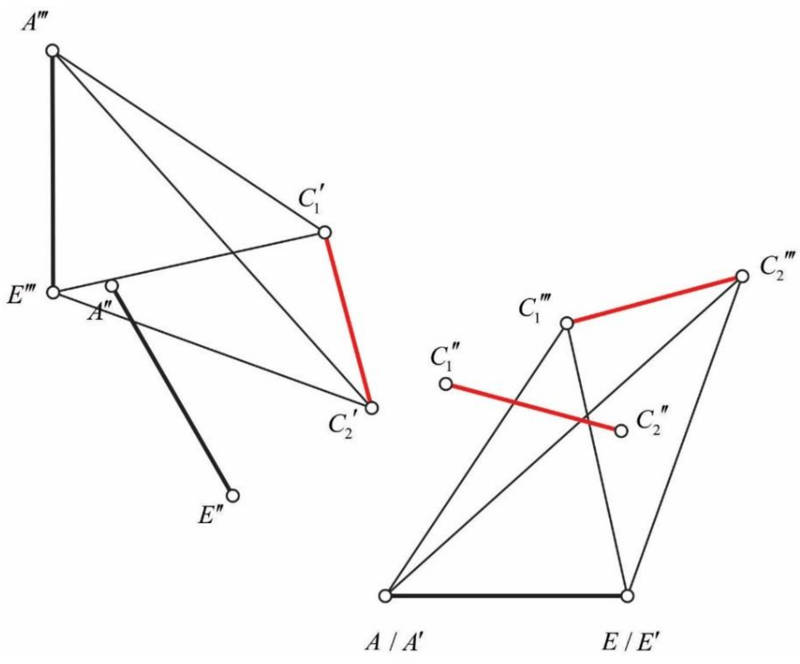
Rešitev

Gre za različico problema s tripoložajno sintezo, pri kateri imamo možnost predpisati lego nepomične ročice. Tipičen problem, ki ga na ta način rešujemo, so omejene gabaritne mere oz. največji prostor, ki ga mehanizem lahko zavzema, čemur prilagodimo tudi lego nepomične ročice. Pri enostavnem postopku tripoložajne sinteze (Zgled 20) namreč končni točki oz. lego nepomične ročice dobimo direktno, vendar takšen mehanizem morda ne izpolnjuje dimenzijskih zahtev. Problem rešujemo s kinematično inverzijo mehanizma, pri kateri najprej uporabimo postopek enostavne tripoložajne sinteze, za dobljeno rešitev – izhodiščno kinematično inverzijo pa nato poiščemo še kinematično inverzijo mehanizma, pri kateri nepomična ročica nahaja v predpisanem položaju.

Za razliko od enostavne tripoložajne sinteze, kjer iščemo položaj nepomične ročice, sta pri sintezi z inverzijo lega in dolžina fiksne ročice znani, nista pa znani legi vpetij dveh gibljivih ročic, ki sta povezani z vezno ročico. Izhodiščno kinematično inverzijo določimo tako, da začasno fiksiramo vezno ročico in obenem sprostimo nepomično ročico. Daljico C_1C_2 fiksiramo v prvem predpisanem položaju (oz. v enem od treh predpisanih). Prvi zaporedni položaj ročice AE se ob tem ne spremeni, ohrani se medsebojna lega točk $C_1'C_2' - AE$ oz. $C_1'C_2' - A'E'$ (sliki 66 in 67). Za drugi zaporedni položaj prenesemo daljico $C_1''C_2''$ v položaj $C_1'C_2'$, pri čemer se ohrani medsebojna lega točk $C_1''C_2'' - AE$ oz. $C_1'C_2' - A''E''$ (slika 67). Podobno tudi za tretji zaporedni položaj prenesemo daljico $C_1'''C_2'''$ v položaj $C_1'C_2'$, pri čemer se ohrani medsebojna lega točk $C_1'''C_2''' - AE$ oz. $C_1'C_2' - A'''E'''$ (slika 68).

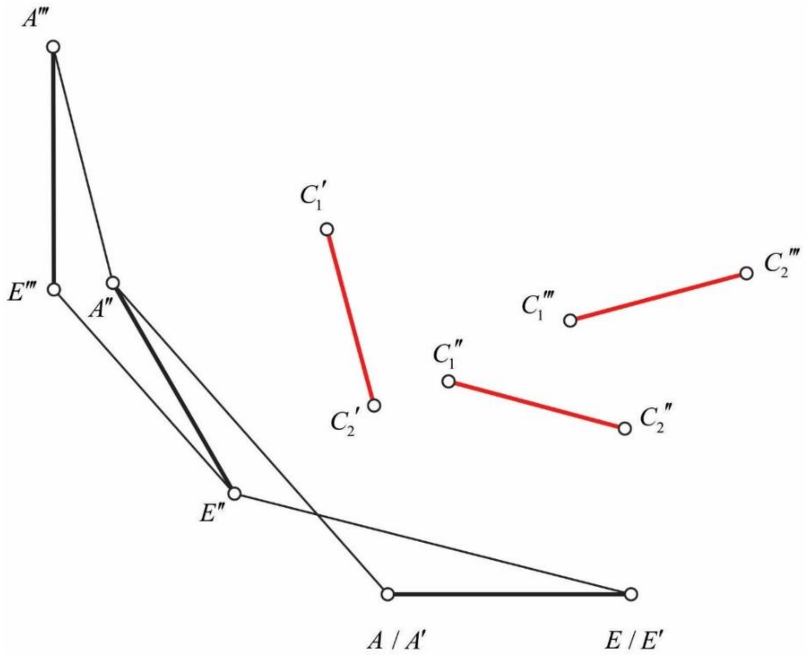


Slika 67. Druga zaporedna lega, prenos v inverzijo.

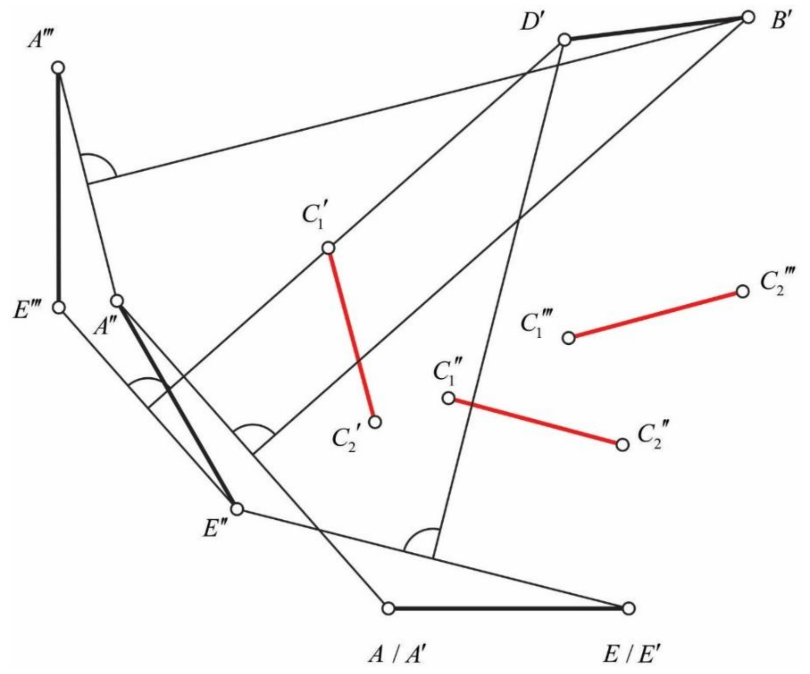


Slika 68. Tretja zaporedna lega, prenos v inverzijo.

Sedaj z enostavno tripoložajno sintezo poiščemo vpetji – središči kroženja B' in D' manjkajočih ročic 2 in 4, ki sta povezani z začasno fiksirano vezno ročico 3 (sliki 69 in 70). Vpetji B' in D' se v splošnem razlikujeta od danih točk na vezni ročici C_1 in C_2.

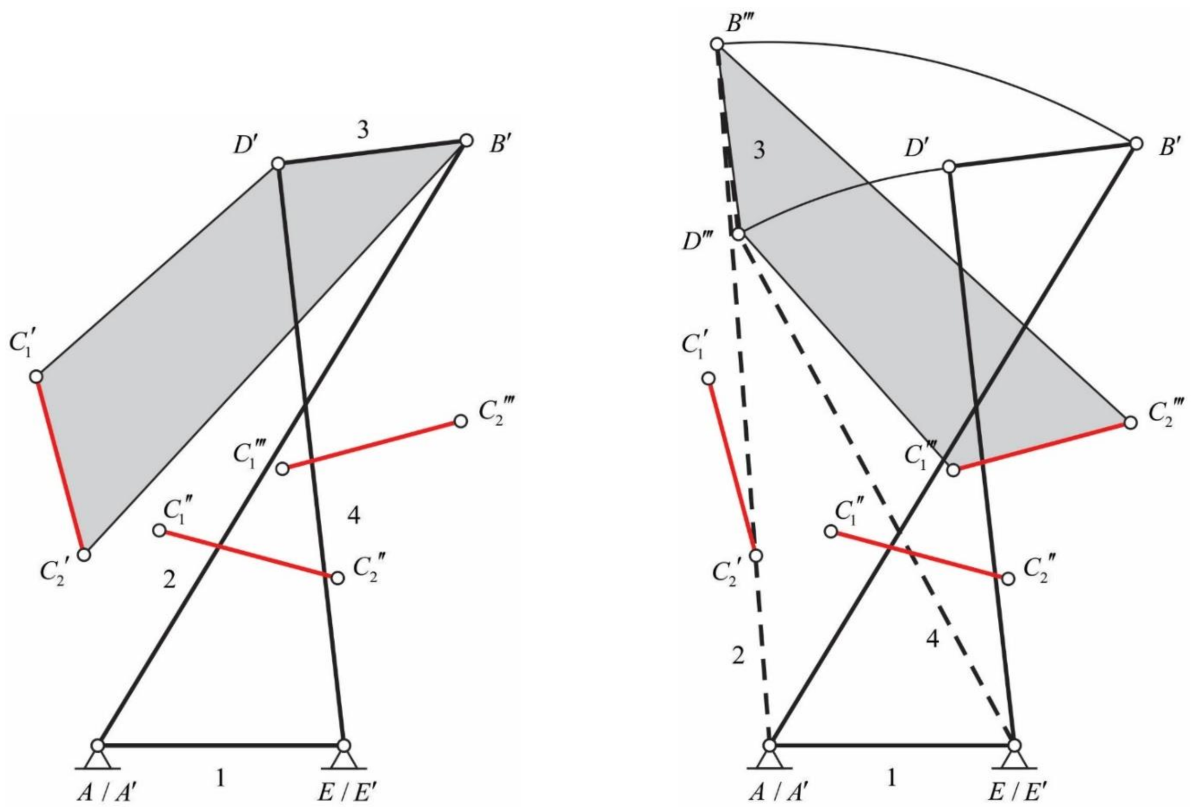


Slika 69. Osnovna tripoložajna sinteza za kinematično inverzijo.



Slika 70. Določitev vpetij vezne ročice B in D oz. B' in D' v prvem zaporednem položaju.

Za prvi zaporedni položaj izhodiščne kinematične inverzije povežemo končni točki ročic 2 in 4, in sicer $A'B'$ ter $E'D'$, hkrati pa je vezna ročica 3 (začasno nepomična) določena s končnima točkama $B'D'$, pri čemer je potrebna pozornost, da ne pride do napačne povezave, saj pri rešitvi lahko pride do križne geometrije mehanizma (slika 71).



Slika 71. Želena kinematična inverzija (levo); kontrola delovnega območja (desno).

Pri izhodiščni kinematični inverziji v prvem zaporednem položaju ponovno fiksiramo ročico AB oz. $A'B'$ ter sprostimo gibanje ročice 3, ki je z ročicama 2 in 4 povezana v točkah BD oz. $B'D'$ tako da dobimo želeno kinematično inverzijo mehanizma z nepomično ročico AB v predpisanem položaju. Relativno gibanje ročic se pri tem ohrani. Dodamo še gibanje daljice C_1C_2 na vezni ročici BD in preverimo celotno območje gibanja, saj lahko pride do pojava mrtvih leg. Sedaj lahko določimo celotno geometrijo mehanizma:

$l_1 = 0{,}4$ m,
$l_2 = 1{,}152$ m,
$l_3 = 0{,}308$ m,
$l_4 = 0{,}952$ m.

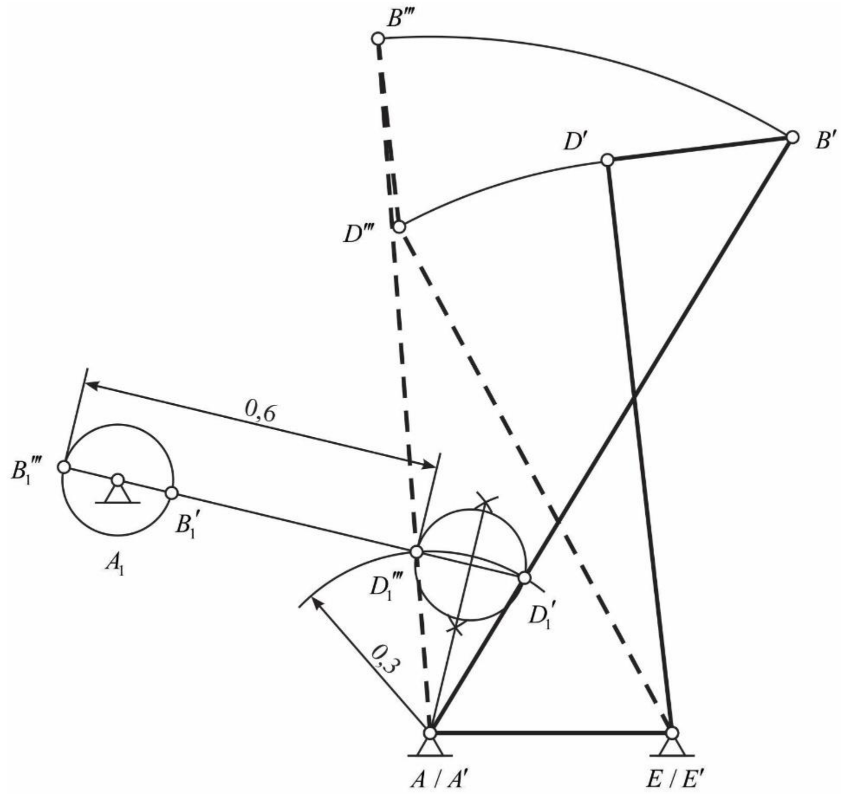
Mehanizem ne izpolnjuje Grashofovega pogoja:

$$(s + l) \leq (p + q),$$

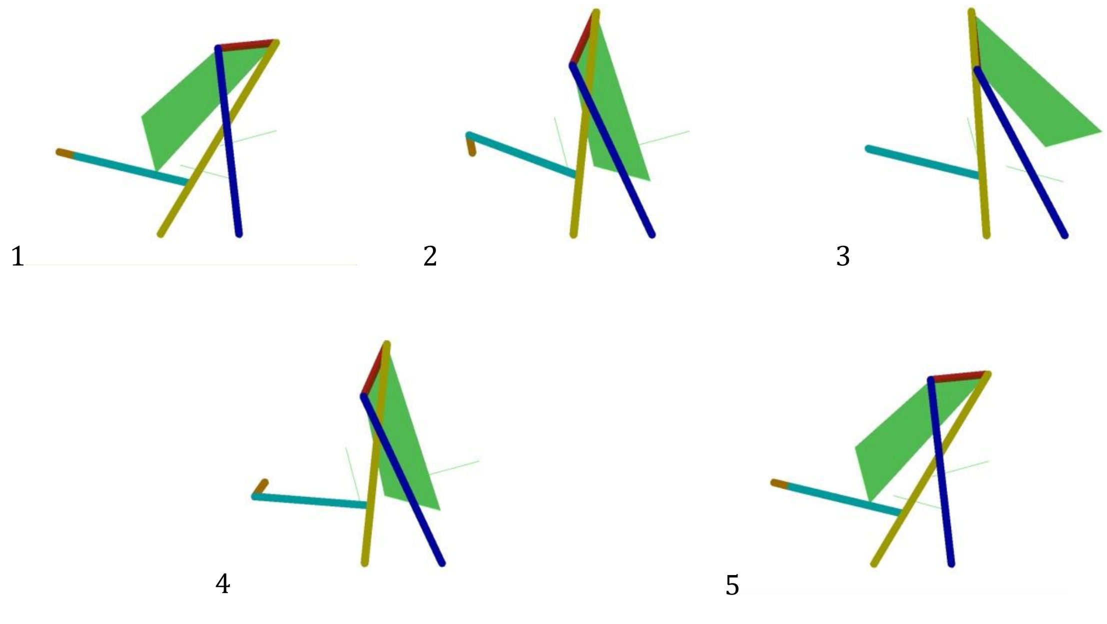
$$(l_3 + l_2) \geq (l_1 + l_4),$$

$$\big(0{,}308\ \text{cm} + 1{,}152\ \text{m}\ (= 1{,}46\ \text{m})\big) \geq \big(0{,}4\ \text{m} + 0{,}952\ \text{m}\ (= 1{,}352\ \text{m})\big),$$

zato lahko ročica 2 samo niha na območju, ki zagotavlja gibanje vezne ročice z daljico C_1C_2 skozi tri predpisane zaporedne položaje. Določimo območje gibanja ročice 2 in obenem preverimo morebitno prisotnost mrtvih leg na želenem delovnem območju mehanizma. V kolikor želimo zagotoviti kontinuirano obratovanje mehanizma, lahko na ročico 2 dodatno povežemo pogonski štirizgibni mehanizem z zahtevanim razmerjem trajanja delovnega in povratnega giba, kjer uporabimo že obravnavani postopek (Zgled 19, Zgled 20). Točko aplikacije pogona D_1 na ročici 2 določimo poljubno oz. v skladu s konstrukcijsko ustreznostjo (primer na slikah 72 in 73). Izbira lege povezave pogonskega mehanizma D_1 in njegova geometrija vplivata na obremenitve v vezeh in ročicah.



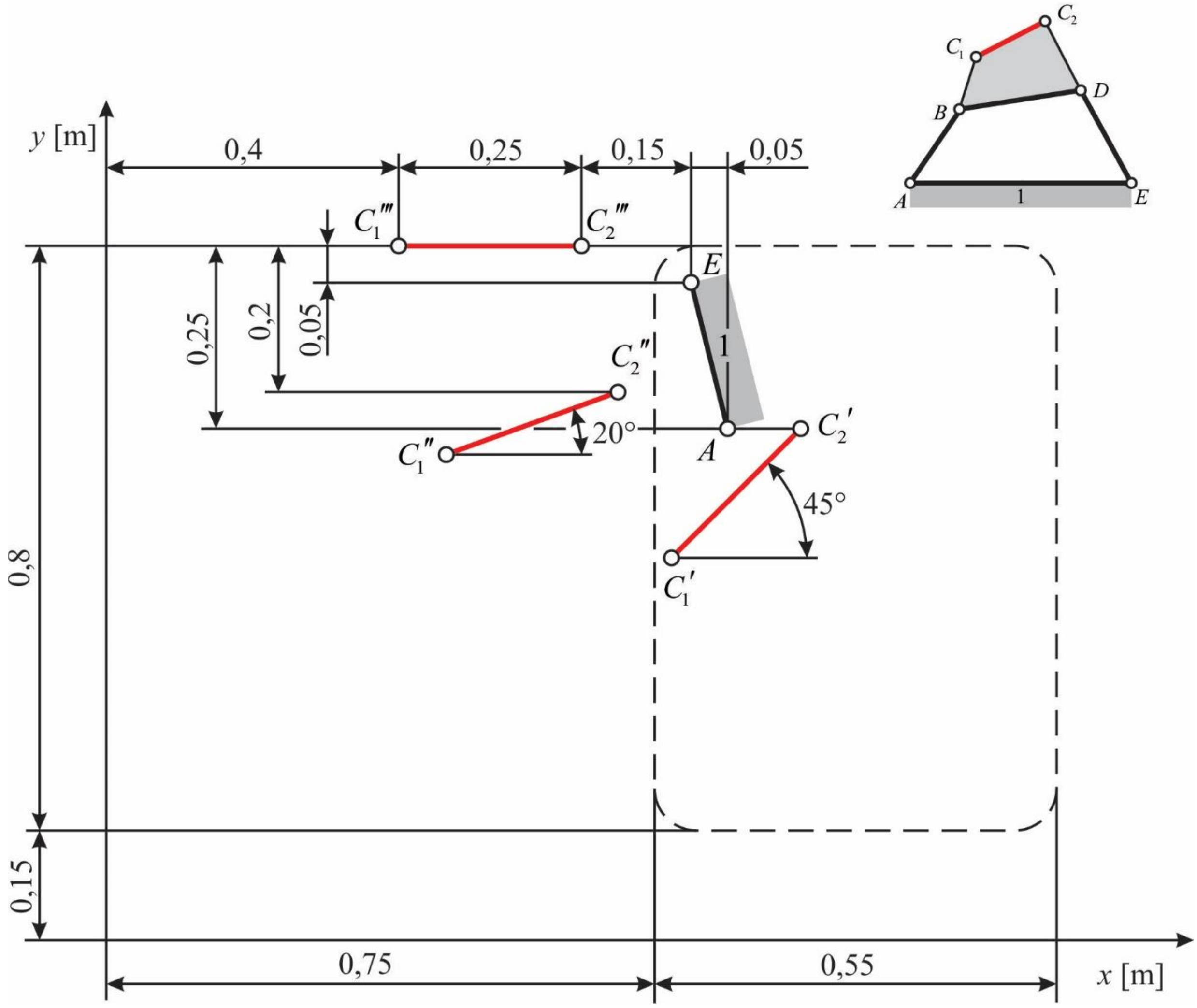
Slika 72. Dodan pogonski mehanizem.



Slika 73. Simulacija gibanja mehanizma skozi lege 1–5 [4].

Zgled 22: Tripoložajna sinteza z znano lego nepomične ročice

Dane so tri zaporedne lege daljice C_1C_2 na vezni ročici 3 štirizgibnega mehanizma, in sicer začetna $C_1{}'C_2{}'$, vmesna $C_1{}''C_2{}''$ in končna $C_1{}'''C_2{}'''$ (slika 74). Izvedite sintezo štirizgibnega mehanizma, ki bo vodil daljico C_1C_2 skozi dane zaporedne lege. Daljica C_1C_2 naj bo del vezne ročice mehanizma, nepomična ročica 1 pa je dana s predpisanima vpetjema A ter E (gl. spodaj desno). Ali se v začetni legi štirizgibni mehanizem nahaja znotraj razpoložljivega prostora?

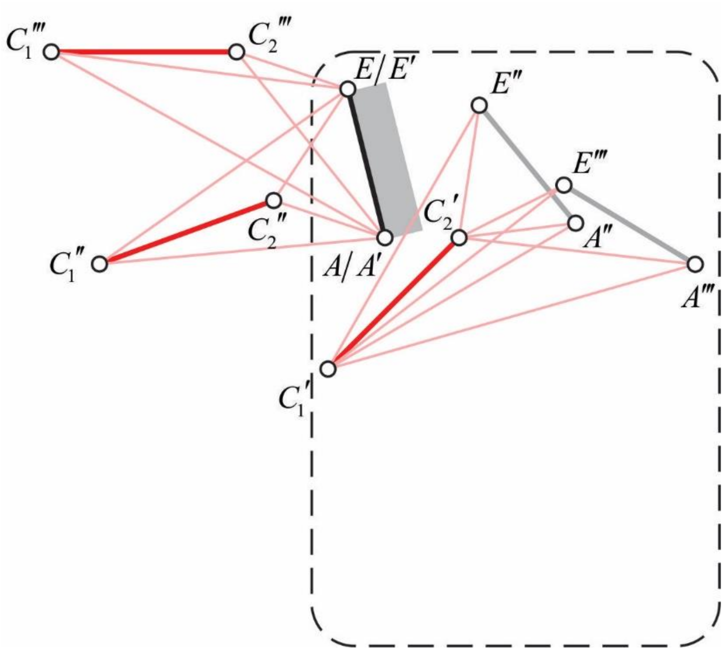


Slika 74. Tri zaporedne lege vezne ročice.

Rešitev

Naloga zahteva reševanje s pomočjo kinematične inverzije, s pomočjo katere določimo dolžine in vpetja ročic štirizgibnega mehanizma, predvidenega za gibanje skozi tri predpisane lege.

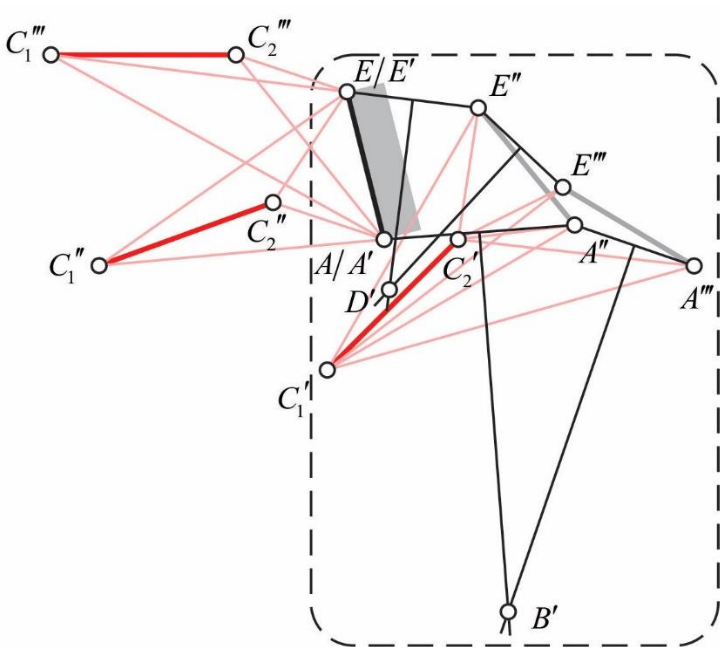
Vezno ročico skupaj z daljico C_1C_2 začasno fiksiramo v prvem predpisani legi $C_1{}'C_2{}'$ (slika 75). Za določitev izhodiščne kinematične inverzije začasno sprostimo nepomično ročico AE, ki v prvi zaporedni legi ostane na svojem mestu, $A'E'$. Drugo zaporedno lego daljice $C_1{}''C_2{}''$ glede na predpisano lego ročice AE prenesemo tako, da lega daljice $C_1{}''C_2{}''$ sovpade z lego $C_1{}'C_2{}'$, pri čemer se ročica AE premakne v lego $A''E''$ in se ohrani medsebojna lega točk $C_1{}''C_2{}'' - AE$ oz. $C_1{}'C_2{}' - A''E''$. Pri tretji zaporedni legi prenesemo daljico $C_1{}'''C_2{}'''$ ponovno na $C_1{}'C_2{}'$, pri čemer se ročica AE premakne v lego $A'''E'''$, tako da se ohrani medsebojna lega točk $C_1{}'''C_2{}''' - AE$ oz. $C_1{}'C_2{}' - A'''E'''$.



Slika 75. Prenos zaporednih leg pri izhodiščni kinematični inverziji.

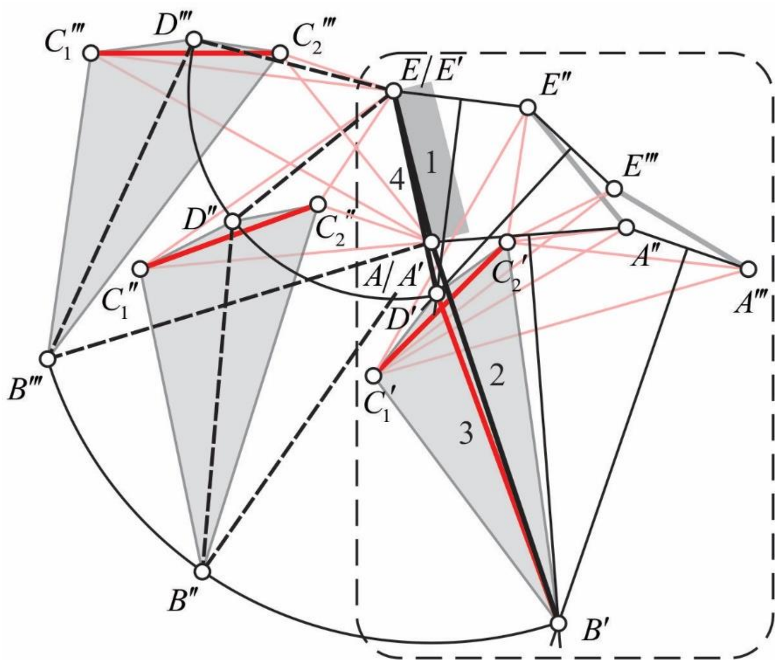
Ker sta točki A in E tudi vpetji ročic 2 in 4, le-ti krožita okoli njiju. Obenem sta ročici 2 in 4 vrtljivo povezani z vezno ročico 3 v točkah B in D, zato tudi pri izhodiščni kinematični inverziji, kjer je začasno sproščeno gibanje ročice AE, točki A in E skupaj z ročicama 2 in 4 krožita okoli B in D.

Z enostavno tripoložajno sintezo izhodiščne kinematične inverzije sedaj lahko določimo vpetji B in D vezne (začasno fiksirane) ročice, tako da na presečišču bisektorjev skozi $A'A''$ in $A''A'''$ dobimo vpetje B', s pomočjo bisektorjev skozi $E'E''$ in $E''E'''$ pa dobimo vpetje D' (slika 76).



Slika 76. Enostavna tripoložajna sinteza za določitev izhodiščne kinematične inverzije.

Sedaj lahko povežemo vpetji A' in B' z ročico 2 ter vpetji E' in D' z ročico 4, s čimer tudi dobimo njuno dolžino, prav tako dolžino vezne ročice 3 med vpetjema $B'D'$, ter ponovno fiksiramo ročico AE v predpisani legi in hkrati sprostimo gibanje vezne ročice (slika 77). Preverimo morebitne mrtve lege na predpisanem območju gibanja. Za dani primer je razvidno, da se vezna ročica v začetnem položaju $B'D'$ skupaj s točkama $C_1{}'C_2{}'$, prav tako na vezni ročici, nahaja znotraj razpoložljivega prostora.



Slika 77. Želena kinematična inverzija štirizgibnega mehanizma; vezna ročica s točkama $C_1{}'C_2{}'$ se v začetnem položaju nahaja znotraj predpisanega prostora.

Želeno kinematično inverzijo lahko namesto za začetni predpisani položaj priredimo tudi za vmesni (ali končni). V takšnem primeru dobimo rešitvi za vpetji B in D za drugo zaporedno lego, $B''D''$, zato moramo rešitev – želeno kinematično inverzijo dodatno premakniti v predpisano začetno lego, da preverimo, ali se mehanizem v začetnem položaju nahaja znotraj razpoložljivega prostora.

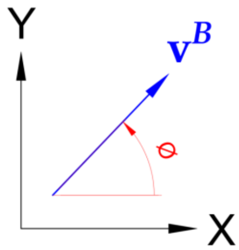
F. Dodatni zgledi

Dodatni zgledi izpitnih nalog in problemov iz prakse so namenjeni kot pomoč pri samostojnem utrjevanju za preverjanje znanja iz analize in sinteze mehanizmov.

Zgled 23: Analiza ročičnega mehanizma

Za primer analize kinematike ročičnega mehanizma so izdelane različne naloge s povečevanjem težavnostne stopnje.

Uporabili smo sledeči način zapisa smeri vektorjev: $\boldsymbol{v}^B = 40$ mm/s ∡45°, kar pomeni, da je vektor $\boldsymbol{v}^B$ usmerjen pod kotom 45°, merjeno iz osi X v matematični pozitivni smeri oz. v obratni smeri urinih kazalcev (slika 78).



Slika 78. Podajanje smeri vektorjev.

Zgled 23a: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 1)

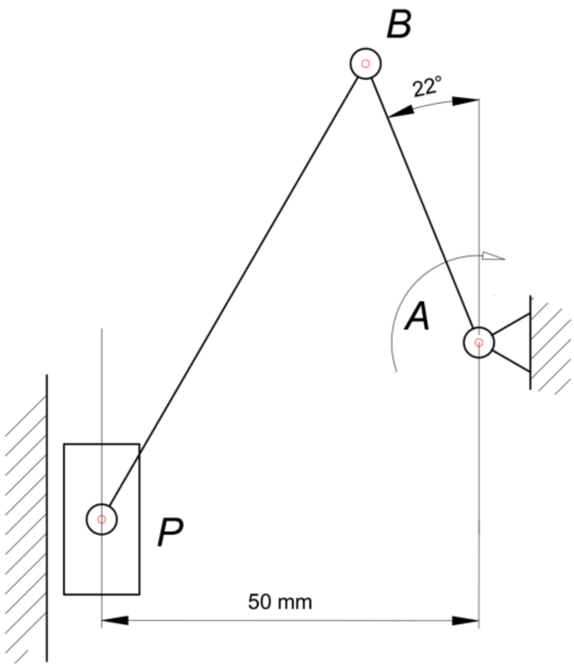
Za lego mehanizma na sliki (slika 79) s pomočjo poligona hitrosti in polov hitrosti določite **hitrost** in **pospešek** točke ***P*** (smer in velikost), če se pogonska ročica ***AB*** vrti sourno s kotno hitrostjo 1 rad/s. Ugotovite tudi, ali je možno vrtenje pogonske ročice ***AB*** za 360° oziroma najdaljšo možno ročico, da je možno polna rotacija (360°) pogonske ročice ***AB***.

Podatki:

$\overline{AB} = 40$ mm

$\overline{BP} = 70$ mm

$\omega_{\overline{AB}} = 1$ rad/s



Slika 79. Ročični mehanizem (merilo 1:1).

Rešitev

a) Pri kinematični analizi hitrosti bo podana rešitev s pomočjo:

1. poligona hitrosti in
2. polov hitrosti.

ad 1) S pomočjo poligona hitrosti:

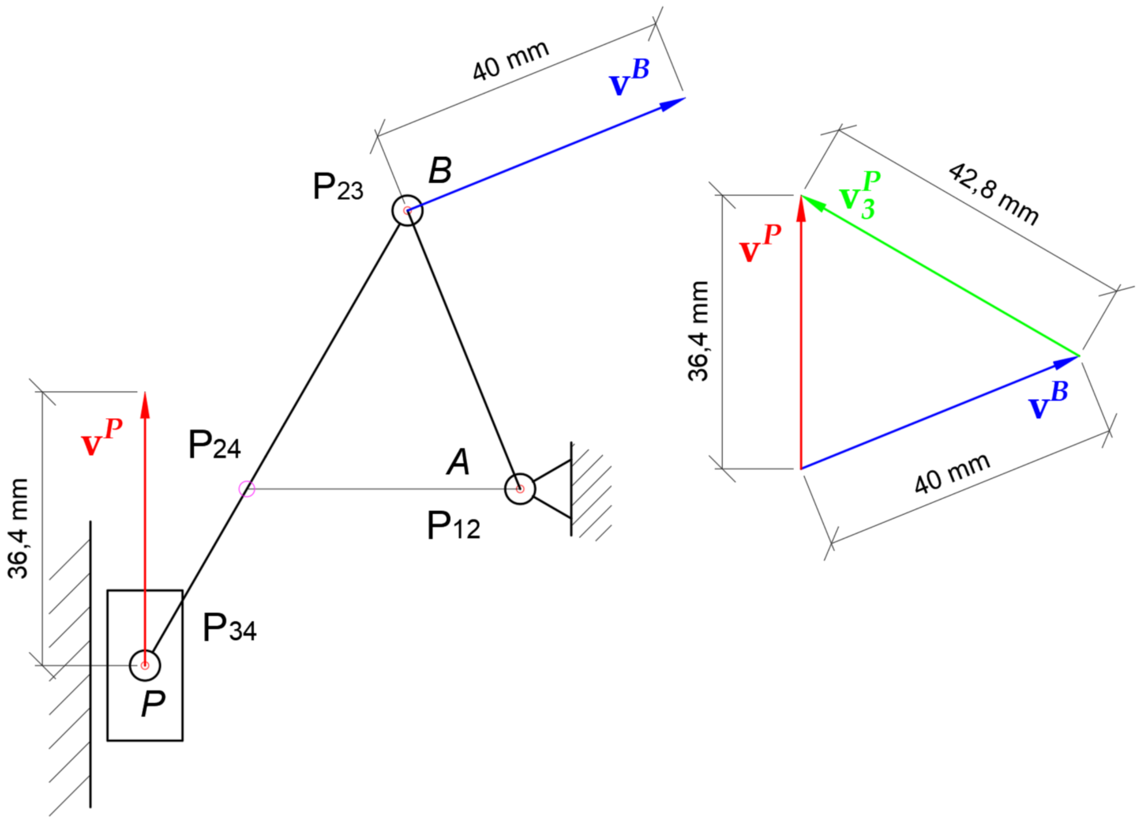
Ročica 2 rotira okoli točke *A*, okoli katere zato kroži druga končna točka *B*, katere (tangencialna) hitrost znaša:

$$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B,$$
$$\boldsymbol{v}^A = 0 \text{ mm/s},$$
$$\boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B = 40 \text{ mm/s} \measuredangle 22°.$$

Hitrost $\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}_2^B$ (zato, ker izhodišče pomičnega koordinatnega sistema oziroma točka *A* miruje) je usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\boldsymbol{s}_2^B$ in jo prenesemo v poligon hitrosti (slika 80). Ročica 3 je povezana z ročico 2 z rotacijsko kinematično vezjo v točki *B*, torej lahko rečemo, da ročica 3 in z njo točka *P* relativno kroži okoli *B*. Relativna hitrost $\boldsymbol{v}_3^B (= \boldsymbol{v}^{BPP})$ točke *P* glede na *B* bo zato usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\boldsymbol{s}_3^P$.

Merilo hitrosti: 10 mm : 10 mm/s

$$\boldsymbol{v}^P = \boldsymbol{v}^B + \boldsymbol{v}_3^P = \boldsymbol{v}^B + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{s}_3^P,$$
$$\boldsymbol{v}_3^P = \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{s}_3^P.$$



Slika 80. Komponente hitrosti za točko *B* in *P* ter poligon hitrosti (merilo 1:1).

Obenem je hitrost $\boldsymbol{v}^P$ točke *P* zaradi translatorne podpore točke *P* vertikalna in iz poligona hitrosti dobimo (slika 80):

$$\boldsymbol{v}^P = 36{,}4 \text{ mm/s} \measuredangle 90°,$$
$$\boldsymbol{v}_3^P = 42{,}8 \text{ mm/s} \measuredangle 150°,$$

iz česar lahko izračunamo še kotno hitrost ročice 3 (vrti se sourno):

$$\omega_3 = \frac{{v_3}^P}{l_3} = 0{,}61 \text{ rad/s}.$$

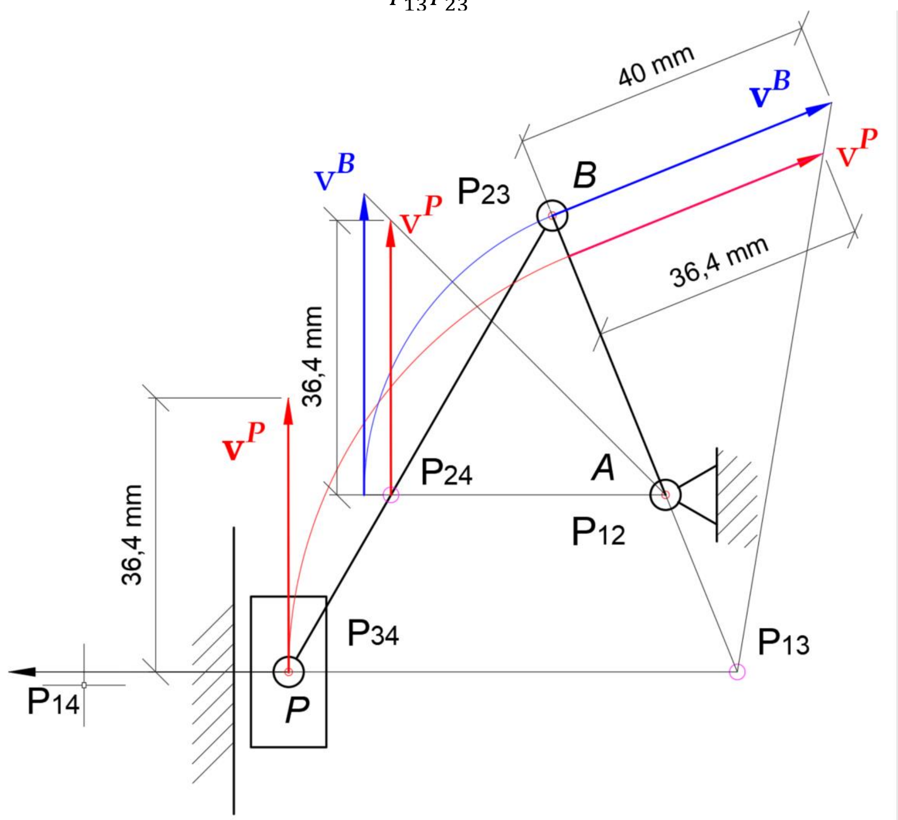
ad 2) S pomočjo polov hitrosti:

Za trenutno lego mehanizma določimo pole hitrosti (slika 81): trije primarni poli se nahajajo v rotacijskih vezeh, pol hitrosti med drsnikom P_{14} in oporo pa je zaradi translatorne vezi v neskončnosti. Sekundarna pola pa določimo po Kennedy-Aronholdovem teoremu:

$$P_{13}\colon P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34},$$
$$P_{24}\colon P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34}.$$

Točka *B* oz. pol hitrosti, kjer sta povezani ročici 2 in 3, kroži okoli vpetja ročice P_{12}. Ker celotna ročica 3 (točki *B* in *P*) kroži okoli pola hitrosti P_{13}, lahko določimo hitrost točke *P*:

$$v^{P_{23}} = \omega_2\overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3\overline{P_{13}P_{23}},$$
$$\omega_3 = \omega_2\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{13}P_{23}}},$$
$$v^{P_{23}} = \omega_2\overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3\overline{P_{13}P_{23}} \rightarrow v^P = v^B\frac{\overline{P_{13}P_{14}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 36{,}4 \text{ mm/s}.$$



Slika 81. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1).

Hitrost točke P lahko določimo tudi iz pola:

$$\boldsymbol{v}^P = v^B \frac{\overline{P_{12}P_{24}}}{P_{13}P_{24}} = 36{,}4\ \text{mm/s}\ \measuredangle 90°.$$

a) Analiza pospeškov:

Analiza določitve pospeškov mehanizma je določena s pomočjo poligona pospeškov.

Ročica 2 rotira okoli točke A, okoli katere zato kroži druga končna točka B, katere pospešek znaša:

$$\boldsymbol{a}^B = \boldsymbol{a}^A + \boldsymbol{a}^B_{rel} + \boldsymbol{a}^B_{cor} + \boldsymbol{a}^B_{N,2} + \boldsymbol{a}^B_{T,2}.$$

Ker se relativni položaj točke B proti točki A ne spreminja, sta relativni in Coriolisov pospešek enaka 0. Ker točka A miruje in je kotna hitrost ročice 2 konstantna oziroma je kotni pospešek ročice 2 enak 0, lahko zapišemo:

Merilo pospeškov: 10 mm : 10 mm/s^2

$$\boldsymbol{a}^A = \boldsymbol{a}^B_{rel} = \boldsymbol{a}^B_{cor} = \boldsymbol{a}^B_{T,2} = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^B = \boldsymbol{a}^B_{N,2} = -\omega_2^2 \cdot \boldsymbol{s}_2^B = 40\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 292°.$$

Enačbo za določitev pospeška točke P zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^P_{rel} + \boldsymbol{a}^P_{cor} + \boldsymbol{a}^P_{N,3} + \boldsymbol{a}^P_{T,3}.$$

Ročica 3 je povezana z ročico 2 z rotacijsko kinematično vezjo v točki B, torej lahko rečemo, da ročica 3 in z njo točka P relativno kroži okoli B in iz kotne hitrosti ročice 3 in relativne oddaljenosti točke P do točke B lahko določimo relativni normalni pospešek točke P:

$$\boldsymbol{a}^P_{rel} = \boldsymbol{a}^P_{cor} = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^P_{N,3} + \boldsymbol{a}^P_{T,3},$$

$$\boldsymbol{a}^P_{N,3} = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}_3^P = 25{,}8\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 60°,$$

$$\boldsymbol{a}^P_{T,3} = \measuredangle 150° \quad \text{ali} \quad \measuredangle 330°\ \text{(usmerjenost pravokotna na normalni pospešek)},$$

$$\boldsymbol{a}^P = \measuredangle 90°.$$

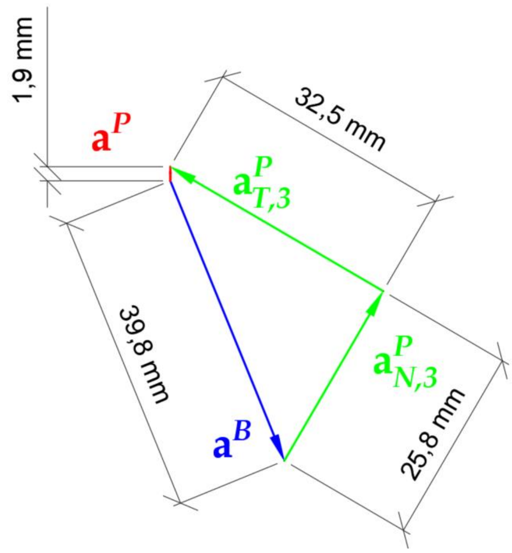
Iz poligona pospeškov dobimo (slika 82):

$$\boldsymbol{a}^P = 1{,}9\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 90°,$$

$$\boldsymbol{a}^P_{T,3} = 32{,}5\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 150°,$$

ter lahko izračunamo kotni pospešek ročice 3:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{\boldsymbol{a}^P_{T,3}}{\overline{PB}} = 0{,}46\ \text{rad/s}^2\ \text{(usmerjenost protiurna)}.$$

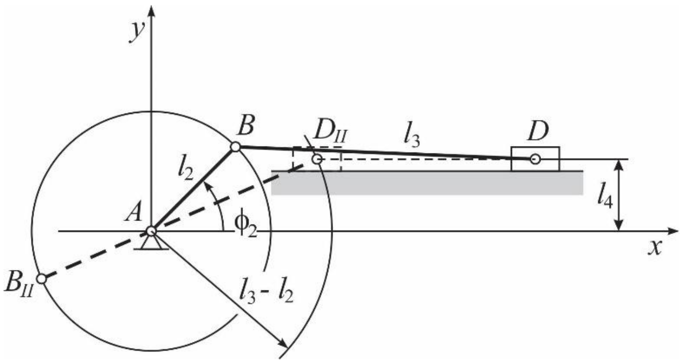


Slika 82. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (merilo 1:1),

b) Vrtenje pogonske ročice *AB* za 360°:

V splošnem se pogonska ročica 2 (AB) lahko zavrti za 360°, če je ekscentričnost drsnika manjša od razlike med dolžino vezne ročice in dolžino pogonske ročice pri delnem prekritju ročic v kolinearni legi II (slika 83):

$$(l_3 - l_2) \geq l_4.$$



Slika 83. Ročični mehanizem.

Za dani primer, kjer je $l_2 = 40$ mm, $l_3 = 70$ mm in $l_4 = 50$ mm, velja:

$$(l_3 - l_2 = 70\ \text{mm} - 40\ \text{mm}) \leq (l_4 = 50\ \text{mm}),$$

zato pogoj ni izpolnjen, kar pomeni, da pogonske ročice 2 (AB) ni možno zavrteti za 360°. Najdaljšo dolžino pogonske ročice 2, da se izpolni pogoj polne rotacije ročice, določimo kot sledi:

$$l_2 \leq (l_3 - l_1),$$

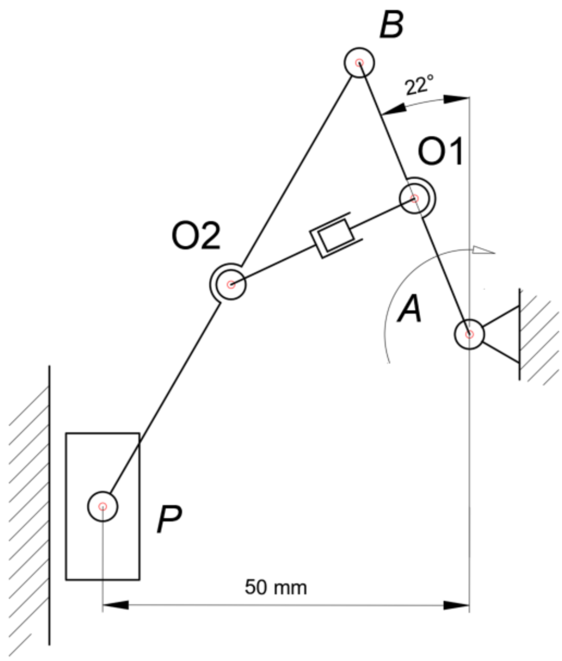
$$l_2 \leq (70\ \text{mm} - 50\ \text{mm} = 20\ \text{mm}).$$

Zgled 23b: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 2)

Za lego mehanizma na sliki (slika 84) določite **hitrost** in **pospešek** točke P (smer in velikost), če linearni aktuator zmanjšuje razdaljo $O1O2$ s hitrostjo 10 mm/s in je kotni pospešek ročice AB enak 0. Določite tudi pospešek delovanja linearnega aktuatorja (slika 84).

Podatki:

$\overline{AB} = 40$ mm
$\overline{BP} = 70$ mm
$\overline{AO1} = \overline{BO1}$
$\overline{BO2} = \overline{PO2}$
$v_{rel}^{O1-O2} = 10$ mm/s
$\alpha_2 = 0$ rad/s^2



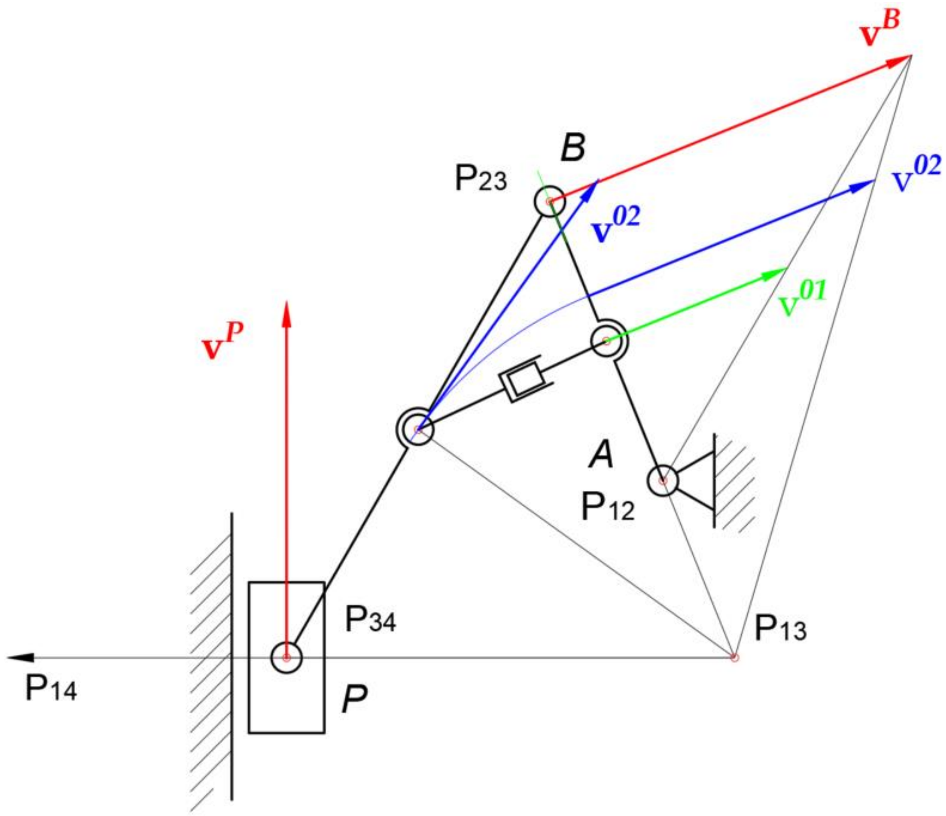
Slika 84. Ročični mehanizem (merilo 1:1).

Rešitev

a) Pri kinematični analizi hitrosti s pomočjo metode polov hitrosti

Ker je geometrija mehanizma enaka kot v Zgledu 23a, je lega polov enaka (sliki 80 in 85), hitrostne razmere pa so drugačne in zahtevajo novo analizo. Za trenutno lego mehanizma določimo pole hitrosti: trije enostavni poli se nahajajo v rotacijskih vezeh, pol hitrosti med drsnikom P_{14} in oporo pa je zaradi translatorne vezi v neskončnosti. Preostala pola pa določimo po Kennedy-Aronholdovem teoremu:

$P_{13}: \quad P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34},$
$P_{24}: \quad P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34}.$



Slika 85. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1).

Iz razmerja oddaljenosti točk B oz. pol hitrosti P_{24} in točke $O1$ na ročici 2 glede na pol P_{12} in hkrati oddaljenosti točk B in $O2$ oziroma celotne ročice 3 glede na pol P_{13} lahko določimo odvisnost relativne hitrosti delovanja aktuatorja na točki $O1$ in $O2$ na kinematiko mehanizma (sliki 85 in 86):

Merilo hitrosti : 10 mm : 10 mm/s² in merilo pospeškov: 10 mm : 10 mm/s²

$$v^{P_{23}} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3 \overline{P_{13}P_{23}},$$

$$v^{P_{23}} = v^{O1} \frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{12}O1}} = v^{O2} \frac{\overline{P_{13}P_{23}}}{\overline{P_{13}O2}}.$$

Določitev razmerja hitrosti točk $O1$ in $O2$ glede na velikost relativne hitrosti med točkama $O1$ in $O2$ (delovanje aktuatorja) (sliki 85 in 86):

$$v_{rel}^{O1-O2} = v^{O2} \cdot \cos(29°) - v^{O1} \cdot \cos(3°).$$

V razmerje vstavimo odvisnost hitrosti točk $O1$ in $O2$ glede na razdaljo do polov hitrosti in dobimo kot sledi v nadaljevanju:

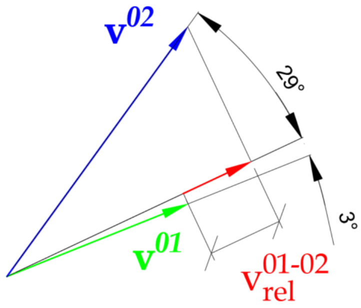
$$v_{rel}^{O1-O2} = v^{O2} \cdot \cos(29°) - v^{O1} \cdot \cos(3°),$$

$$v_{rel}^{O1-O2} = v^{O1} \frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{12}O1}} \frac{\overline{P_{13}O2}}{\overline{P_{13}P_{23}}} \cdot \cos(29°) - v^{O1} \cdot \cos(3°),$$

$$v_{rel}^{O1-O2} = v^{O1} \left(\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{12}O1}} \frac{\overline{P_{13}O2}}{\overline{P_{13}P_{23}}} \cdot \cos(29°) - \cos(3°) \right),$$

$$v^{O1} = \frac{v_{rel}^{O1-O2}}{\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{12}O1}}\frac{\overline{P_{13}O2}}{\overline{P_{13}P_{23}}} \cdot \cos(29°) - \cos(3°)} = \frac{10\ \text{mm/s}}{\frac{40}{20} \cdot \frac{51{,}8}{65{,}4} \cdot \ \cos(29°) - \cos(3°)} = 25{,}9\ \text{mm/s},$$

$$v^{O2} = v^{O1}\frac{\overline{P_{12}P_{23}}}{\overline{P_{12}O1}}\frac{\overline{P_{13}O2}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 41{,}0\ \text{mm/s}.$$



Slika 86. Razmerje hitrosti točk $O1$ in $O2$ (merilo 1:1).

Določimo lahko tudi kotne hitrosti ročic 2 in 3 ter hitrost točk B in P:

$$\omega_2 = \frac{v^B}{l_2} = \frac{v^{O1}}{\overline{P_{12}O1}} = 1{,}3\ \text{rad/s},$$

$$\omega_3 = \frac{v^{O2}}{\overline{P_{13}O2}} = 0{,}79\ \text{rad/s},$$

$$\boldsymbol{v}^B = 52{,}0\ \text{mm/s}\ \measuredangle 22°,$$

$$v^P = v^B\frac{\overline{P_{13}P_{34}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 47{,}4\ \text{mm/s},$$

$$\boldsymbol{v}^P = 47{,}4\ \text{mm/s}\ \measuredangle 90°.$$

b) Analiza pospeškov

Analiza določitve pospeškov mehanizma je določena s pomočjo poligona pospeškov in se popolnoma identično določi kot pri nalogi 1a:

$$\boldsymbol{a}^B = \boldsymbol{a}^A + \boldsymbol{a}_{rel}^B + \boldsymbol{a}_{cor}^B + \boldsymbol{a}_{N,2}^B + \boldsymbol{a}_{T,2}^B,$$

$$\boldsymbol{a}^A = \boldsymbol{a}_{rel}^B = \boldsymbol{a}_{cor}^B = \boldsymbol{a}_{T,2}^B = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^B = \boldsymbol{a}_{N,2}^B = -\omega_2^2 \cdot \boldsymbol{s}_2^B = 67{,}6\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 292°.$$

Enačbo za določitev pospeška točke P zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}_{rel}^P + \boldsymbol{a}_{cor}^P + \boldsymbol{a}_{N,3}^P + \boldsymbol{a}_{T,3}^P,$$

$$\boldsymbol{a}_{rel}^P = \boldsymbol{a}_{cor}^P = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}_{N,3}^P + \boldsymbol{a}_{T,3}^P,$$

$$\boldsymbol{a}_{N,3}^P = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}_3^P = 43{,}7\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 60°$$

ter lahko določimo usmerjenost pospeškov:

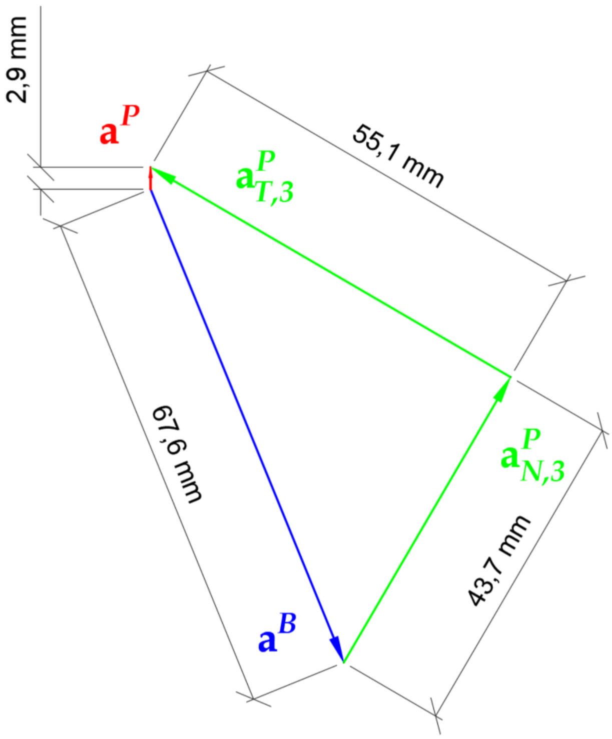
$$\boldsymbol{a}_{T,3}^{P} = ∡150° \text{ ali } ∡330°,$$
$$\boldsymbol{a}^{P} = ∡90°$$

in iz poligona pospeškov dobimo (slika 87):

$$\boldsymbol{a}^{P} = 2{,}9 \text{ mm/s}^2 \; ∡90°,$$
$$\boldsymbol{a}_{T,3}^{P} = 55{,}1 \text{ mm/s}^2 \; ∡150°,$$

ker lahko izračunamo kotni pospešek ročice 3:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_{T,3}^{P}}{\overline{PB}} = 0{,}79 \text{ rad/s}^2.$$



Slika 87. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (merilo 1:1).

Za določitev relativnega pospeška med točkama $O1$ in $O2$ v smeri delovanja linearnega aktuatorja moramo najprej določiti pospešek točke $O2$. Enačbo za določitev pospeška točke $O2$ zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^{O2} = \boldsymbol{a}^{B} + \boldsymbol{a}_{rel}^{O2} + \boldsymbol{a}_{cor}^{O2} + \boldsymbol{a}_{N,3}^{O2} + \boldsymbol{a}_{T,3}^{O2},$$

$$\boldsymbol{a}_{rel}^{O2} = \boldsymbol{a}_{cor}^{O2} = 0 \text{ mm/s}^2,$$

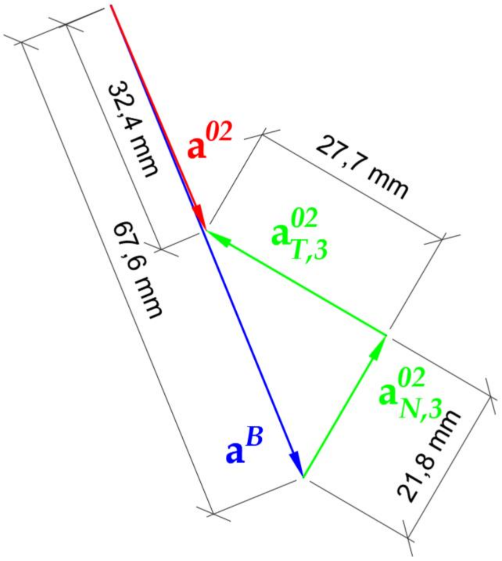
$$\boldsymbol{a}^{O2} = \boldsymbol{a}^{B} + \boldsymbol{a}_{N,3}^{O2} + \boldsymbol{a}_{T,3}^{O2},$$

$$\boldsymbol{a}_{N,3}^{O2} = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}_3^{O2} = 21{,}8 \text{ mm/s}^2 \; ∡60°,$$

$$\boldsymbol{a}_{T,3}^{O2} = \boldsymbol{\alpha}_3 \times \boldsymbol{s}_3^{O2} = 27{,}65 \text{ mm/s}^2 \; ∡150°$$

in iz poligona pospeškov dobimo (slika 88):

$$\boldsymbol{a}^{02} = 32{,}4 \text{ mm/s}^2 \; ∡293°.$$

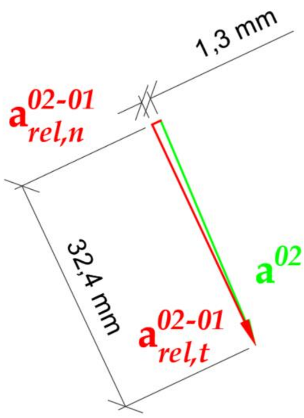


Slika 88. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke $O2$ (merilo 1:1).

Iz pospeška točke $O2$ nato preko poligona pospeška določimo relativni pospešek aktuatorja (pospešek med točkama $O1$ in $O2$ v smeri delovanja aktuatorja) (slika 89):

$$\boldsymbol{a}^{O2} = \boldsymbol{a}_{rel,n}^{O2-01} + \boldsymbol{a}_{rel,t}^{O2-01},$$

$$\boldsymbol{a}_{rel,n}^{O2-01} = 1{,}3\ \mathrm{mm/s^2}\ \measuredangle 205°.$$



Slika 89. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke $O2$ (merilo 1:1).

Zgled 24a: Analiza večzgibnega mehanizma (stopnja težavnosti 3)

Za lego mehanizma na sliki (slika 90) določite, če je pogonska ročica 2 (***AB***):

1. pol hitrosti med ročico 3 (***BD***) in ročico 5 (***CP***),
2. razmerje momentov med ročico 2 (***AB***) in ročico 4 (***DE***),
3. ali je možna polna rotacija (za 360°) ene izmed ročic,
4. delovno območje mehanizma in mrtve lege,
5. s pomočjo poligona hitrosti in polov hitrosti določite **hitrost** in **pospešek** točke *P* (smer in velikost), če se pogonska ročica 2 (***AB***) vrti sourno s kotno hitrostjo 0,4 rad/s in pojemajoče s kotnim pospeškom 0,5 rad/s².

Podatki:

$\overline{AB} = 100$ mm

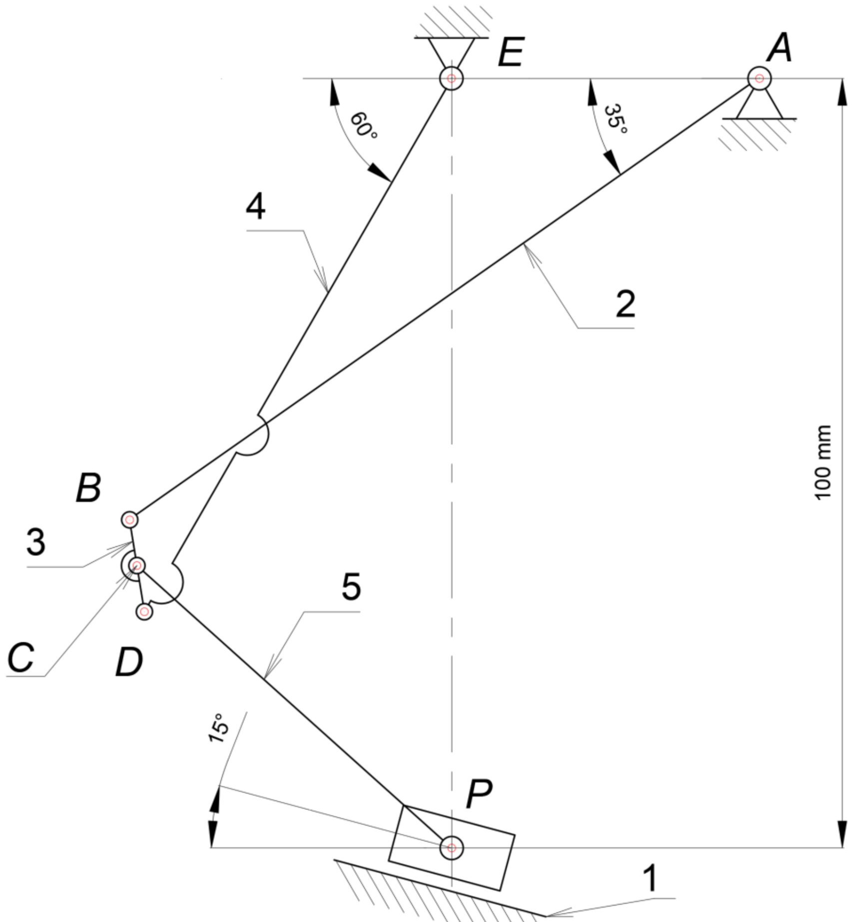
$\overline{AE} = 40$ mm

$\overline{BC} = \overline{CD}$

$\overline{CP} = 55$ mm

$\omega_{\overline{AB}} = 0{,}4$ rad/s

$\alpha_{\overline{AB}} = 0{,}5$ rad/s^2



Slika 90. Mehanizem – Zgled 24a (merilo 1:1).

<u>Rešitev:</u>

Mehanizem lahko obravnavamo, kot da ga sestavlja štirizgibni mehanizem *ABDE* s točko *C* na vezni ročici 3, z dodano ročico 5 in drsnikom 6.

ad 1) <u>Za določitev pola hitrosti med ročico 3 (*BD*) in ročico 5 (*CP*) za trenutno lego mehanizma</u> moramo določiti (slika 91):

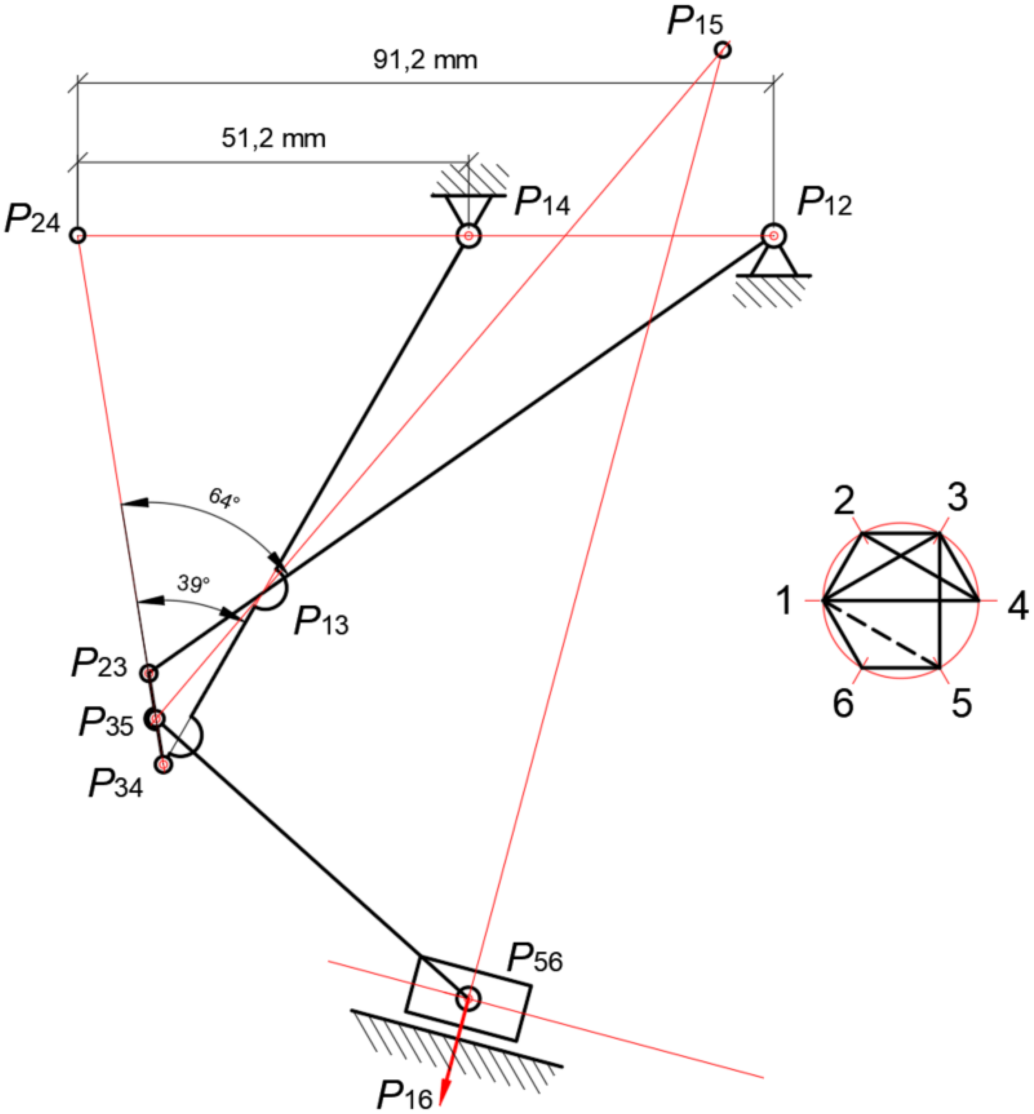
- šest enostavnih polov se nahaja v rotacijskih vezeh,
- pol hitrosti med drsnikom in podlago P_{16} pa je zaradi translatorne vezi v neskončnosti,

- da lahko določimo pol P_{15}, moramo pred tem po Kennedy-Aronholdovem teoremu določiti pola P_{13} in P_{24}:

$$P_{13}: \quad P_{12}P_{23} - P_{14}P_{34},$$

$$P_{24}: \quad P_{12}P_{14} - P_{23}P_{34},$$

$$P_{15}: \quad P_{16}P_{56} - P_{13}P_{35}.$$



Slika 91. Določitev polov hitrosti in prenosnih kotov *(merilo 1:1)*

ad 2) <u>Razmerje momentov med ročico 2 (***AB***) in ročico 4 (***DE***)</u> lahko določimo iz:

- velikosti prenosnih kotov β in γ:

$$\frac{M_4}{M_2} = \frac{l_4 \sin(\gamma)}{l_2 \sin(\beta)} = \frac{80\ \text{mm} \cdot \sin(39°)}{100\ \text{mm} \cdot \sin(64°)} = 0{,}56,$$

- položaja pola P_{24}:

$$\frac{M_4}{M_2} = \frac{\overline{P_{14}P_{24}}}{\overline{P_{12}P_{24}}} = \frac{61{,}2\ \text{mm}}{91{,}2\ \text{mm}} = 0{,}56.$$

ad 3) Preverjanje polne rotacije (za 360°) ene izmed ročic – izvedemo na podlagi Grashofovega pogoja:

$$(s+l) \leq (p+q),$$

kjer je :

$s = l_3 = \ 12{,}15 \text{ mm},$
$l = l_3 = 100 \text{ mm},$
$p = l_1 = 40 \text{ mm},$
$q = l_4 = 80 \text{ mm},$
$(s+l) \leq (p+q)\text{:} \ \ 112{,}15 \text{ mm} \leq 120 \text{ mm},$

iz česar lahko zaključimo, da je možna polna rotacije ročice 3.

ad 4) Določitev delovnega območja mehanizma in mrtvih leg:

- Največji in najmanjši kot rotacije ročice 2 (kot α) določimo s pomočjo kosinusovega izreka iz položaja, ko sta ročici 3 in 4 kolinearni (kot $\gamma = 0°$) – to sta mrtvi legi mehanizma (slika 92 levo):

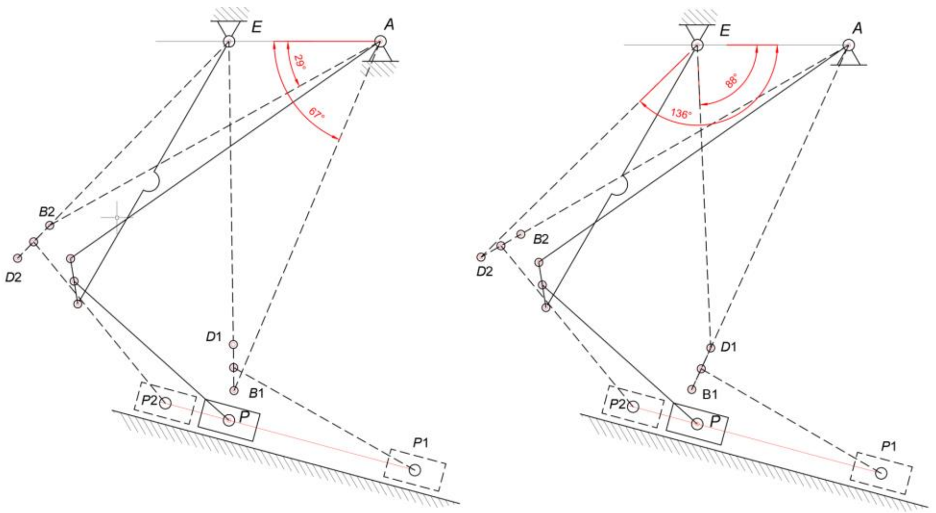
$$\alpha_1 = \arccos\left[\frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_4 + l_3)^2}{2l_1 l_2}\right] = 67{,}2°,$$

$$\alpha_2 = \arccos\left[\frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_4 - l_3)^2}{2l_1 l_2}\right] = 29{,}0°.$$

- Največji in najmanjši kot rotacije ročice 4 (kot ϕ) določimo iz položaja, ko sta ročici 2 in ročici 3 kolinearni (kot $\beta = 0°$) (slika 92 desno):

$$\phi_1 = \arccos\left[\frac{l_1^2 + l_4^2 - (l_2 - l_3)^2}{2l_1 l_4}\right] = 87{,}5°,$$

$$\phi_2 = \arccos\left[\frac{l_1^2 + l_4^2 - (l_2 - l_3)^2}{2l_1 l_4}\right] = 135{,}7°.$$



Slika 92. Določitev delovnega območja in mrtvih leg (merilo 1:2); levo: $\gamma = 0°$, desno $\beta = 0°$.

ad 5) S pomočjo poligona hitrosti in polov hitrosti določite hitrost točke ***P*** in nato tudi pospešek točke ***P*** (smer in velikost), če se pogonska ročica 2 (***AB***) vrti sourno s kotno hitrostjo 0,4 rad/s in pojemajoče s kotnim pospeškom 0,5 rad/s²:

- Določitev hitrosti s pomočjo poligona hitrosti (slika 93):
  Ročica 2 rotira okoli točke *A*, okoli katere zato kroži druga končna točka *B*, katere (tangencialna) hitrost znaša:

  Merilo hitrosti : 10 mm : 10 mm/s² in merilo pospeškov: 10 mm : 10 mm/s²

  $$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B,$$

  $$\boldsymbol{v}^A = 0 \text{ mm/s},$$

  $$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B = 40 \text{ mm/s} \measuredangle 125°.$$

  Hitrost $\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}_2^B$ (zato ker izhodišče pomičnega koordinatnega sistema oziroma točka *A* miruje) je usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\boldsymbol{s}_2^B$ in jo prenesemo v poligon hitrosti (slika 93). Ročica 3 je povezana z ročico 2 z rotacijsko kinematično vezjo v točki *B*, torej lahko rečemo, da ročica 3 in z njo točka *D* relativno kroži okoli *B*. Hkrati pa tudi točka *D* relativno kroži okoli točke *E*:

  $$\boldsymbol{v}^D = \boldsymbol{v}^B + \boldsymbol{v}_2^D = \boldsymbol{v}^B + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{s}_3^D,$$

  $$\boldsymbol{v}^D = \boldsymbol{v}^E + \boldsymbol{v}_4^D = \boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{s}_4^D,$$

  $$\boldsymbol{v}^E = 0 \text{ mm/s},$$

  $$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B = 40 \text{ mm/s} \measuredangle 125°,$$

  iz poligona hitrosti nato dobimo:

  $$\boldsymbol{v}^D = 57{,}0 \text{ mm/s} \measuredangle 150°,$$

  $$\boldsymbol{v}_3^D = 26{,}7 \text{ mm/s} \measuredangle 189°,$$

  $$\boldsymbol{v}^C = 47{,}4 \text{ mm/s} \measuredangle 140°,$$

  iz česar lahko izračunamo še kotno hitrosti ročice 3 in 4:

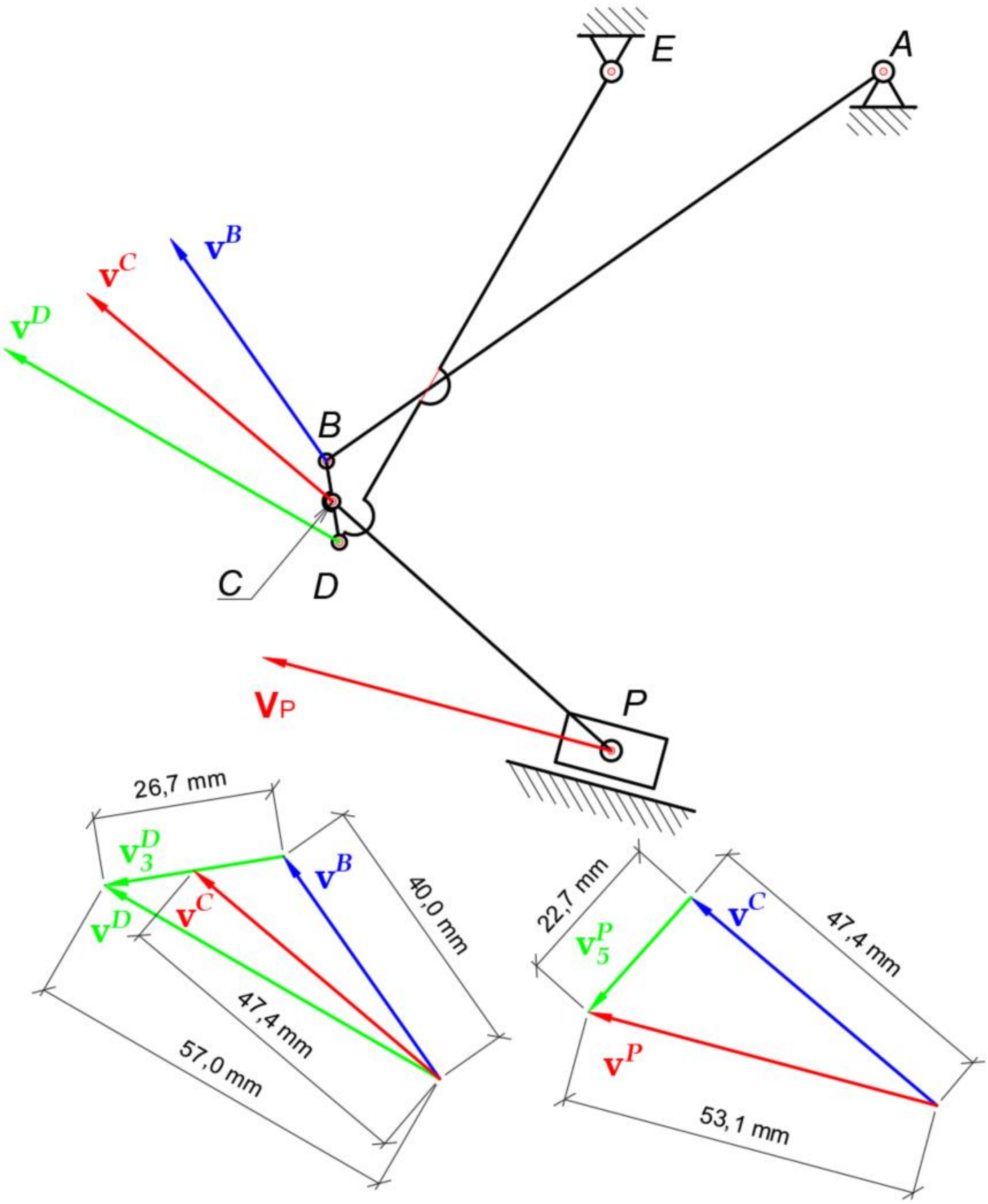
  $$\omega_3 = \frac{v_3{}^D}{l_3} = 2{,}2 \text{ rad/s},$$

  $$\omega_4 = \frac{\boldsymbol{v}^D}{l_3} = 0{,}71 \text{ rad/s}.$$

  Točka *C* leži na polovici dolžine ročice 3 in zato lahko iz poligona hitrosti določimo:
  $$\boldsymbol{v}^C = 47{,}4 \text{ mm/s} \measuredangle 189°.$$

  Iz vektorja hitrosti točke *C* ter smeri relativne hitrosti vrtenja točke *P* okoli točke *C* (usmerjena pravokotno na krajevni vektor $\boldsymbol{s}_5^P$) ter smeri vektorja hitrosti točke P kreiramo poligon hitrosti in dobimo:

  $$\boldsymbol{v}^P = 53{,}1 \text{ mm/s} \measuredangle 165°,$$
  $$\boldsymbol{v}_5^P = 22{,}7 \text{ mm/s} \measuredangle 228°,$$
  $$\omega_5 = \frac{\boldsymbol{v}_5^P}{l_5} = 0{,}41 \text{ rad/s}.$$



Slika 93. Komponente hitrosti za točki B in P ter poligon hitrosti (merilo 1:2); levo: $\gamma = 0°$, desno $\beta = 0°$.

- <u>Določitev hitrosti s pomočjo polov hitrosti</u> (slika 94):

  Točka B oz. pol P_{23}, kjer sta povezani ročici 2 in 3, kroži okoli vpetja ročice P_{12}. Hkrati točke B, D in C oziroma celotna ročica 3 krožijo okoli P_{13}, lahko določimo hitrost točk D in C:

$$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B = 40 \text{ mm/s } \measuredangle 125°,$$

$$\boldsymbol{v}^D = \boldsymbol{v}^B \frac{\overline{P_{13}P_{34}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 57{,}0 \text{ mm/s} \measuredangle 150°,$$

$$\boldsymbol{v}^C = \boldsymbol{v}^B \frac{\overline{P_{13}P_{35}}}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 47{,}4\ \text{mm/s}\ \measuredangle 140°.$$

Hitrost točke P lahko določimo iz pola P_{15}:

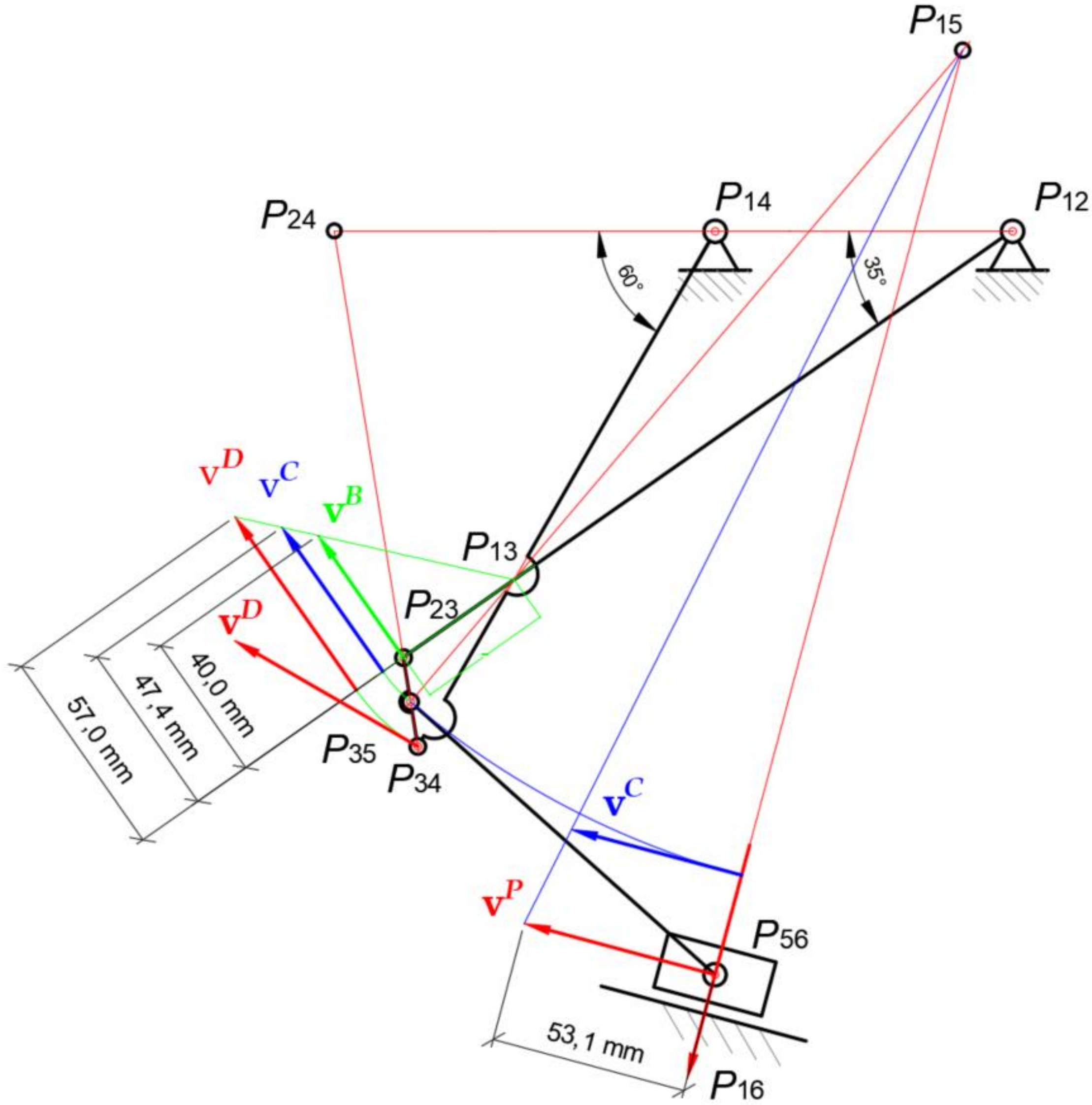
$$\boldsymbol{v}^P = \boldsymbol{v}^C \frac{\overline{P_{15}P_{56}}}{\overline{P_{15}P_{35}}} = 53{,}1\ \text{mm/s}\ \measuredangle 165°.$$

Izračunamo lahko še kotne hitrosti ročic 3, 4 in 5:

$$\omega_3 = \frac{v^B}{\overline{P_{13}P_{23}}} = 2{,}2\ \text{rad/s}\ \text{(sourno vrtenje)}.$$

$$\omega_4 = \frac{v^D}{\overline{P_{14}P_{34}}} = 0{,}71\ \text{rad/s}\ \text{(sourno vrtenje)}.$$

$$\omega_5 = \frac{v^P}{\overline{P_{15}P_{56}}} = 0{,}41\ \text{rad/s}\ \text{(sourno vrtenje)}.$$



Slika 94. Analiza hitrosti s pomočjo polov hitrosti (merilo 1:1).

- Določitev **pospeška** točke ***P*** (smer in velikost), če se pogonska ročica 2 (***AB***) vrti sourno s kotno hitrostjo 0,4 rad/s in pojemajoče s kotnim pospeškom 0,5 rad/s²

Analiza določitve pospeškov mehanizma je določena s pomočjo poligona pospeškov. Ročica 2 rotira okoli točke A, okoli katere zato kroži druga končna točka B, katere pospešek znaša:

$$\boldsymbol{a}^B = \boldsymbol{a}^A + \boldsymbol{a}^B_{rel} + \boldsymbol{a}^B_{cor} + \boldsymbol{a}^B_{N,2} + \boldsymbol{a}^B_{T,2}.$$

Ker se relativni položaj točke B proti točki A ne spreminja, sta relativni in Coriolisov pospešek enaka 0. Ker točka A miruje, lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^A = \boldsymbol{a}^B_{rel} = \boldsymbol{a}^B_{cor} = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^B_{N,2} = -\omega_2^2 \cdot \boldsymbol{s}_2^B = 16\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 35°,$$

$$\boldsymbol{a}^B_{T,2} = \alpha_2 \times \boldsymbol{s}_2^A = 50\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 305°.$$

Enačbo za določitev pospeška točke D zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^D = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^D_{rel} + \boldsymbol{a}^D_{cor} + \boldsymbol{a}^D_{N,3} + \boldsymbol{a}^D_{T,3}.$$

Ročica 3 je povezana z ročico 2 z rotacijsko kinematično vezjo v točki B, torej lahko rečemo, da ročica 3 in z njo točka D relativno kroži okoli B in hkrati okoli točke E. Iz kotne hitrosti ročice 3 in 4 in relativne oddaljenosti točke D do točk B in E lahko izračunamo relativno normalna pospeška točke D pri rotaciji okoli točke B in okoli točke E:

$$\boldsymbol{a}^D_{rel} = \boldsymbol{a}^D_{cor} = 0\ \text{mm/s}^2$$

$$\boldsymbol{a}^D = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^D_{N,3} + \boldsymbol{a}^D_{T,3}$$

$$\boldsymbol{a}^D_{N,3} = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}_3^D = 58{,}8\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 99°$$

$$\boldsymbol{a}^D_{T,3} = \measuredangle 9°\ \text{ ali }\ \measuredangle 189°\ \text{(usmerjenost vektorja)}$$

$$\boldsymbol{a}^D_{N,4} = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}_3^D = 40{,}6\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 60°$$

$$\boldsymbol{a}^D_{T,4} = \measuredangle 150°\ \text{ ali }\ \measuredangle 330°\ \text{(usmerjenost vektorja)}$$

Iz poligona pospeškov dobimo (slika 95):

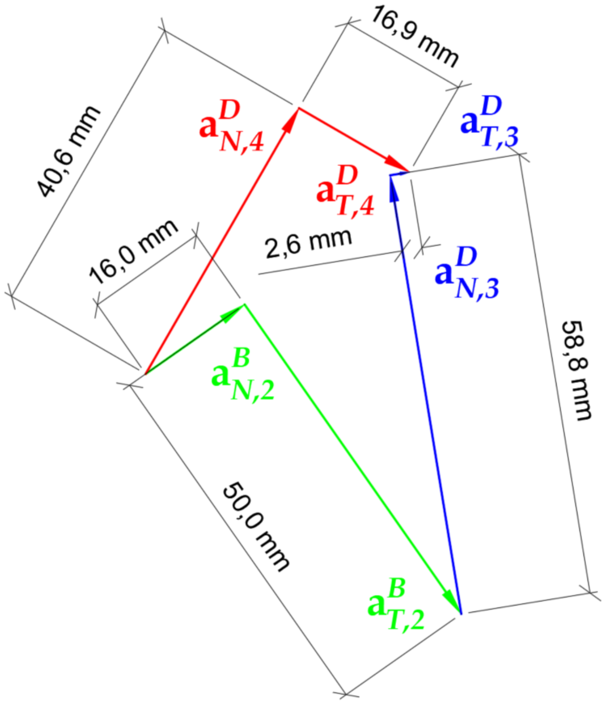
$$\boldsymbol{a}^D_{T,3} = 2{,}6\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 9°$$

$$\boldsymbol{a}^D_{T,4} = 16{,}9\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 330°,$$

lahko izračunamo kotni pospešek ročic 3 in 4:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{\boldsymbol{a}^D_{T,3}}{\overline{BD}} = 0{,}21\ \text{rad/s}^2\quad \text{(usmerjenost sourna)},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \frac{\boldsymbol{a}^D_{T,4}}{\overline{ED}} = 0{,}21\ \text{rad/s}^2\quad \text{(usmerjenost sourna)}.$$



Slika 95. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke D in kotnih pospeškov ročic 3 in 4 (merilo 1:1).

Določiti je treba še pospešek točke C:

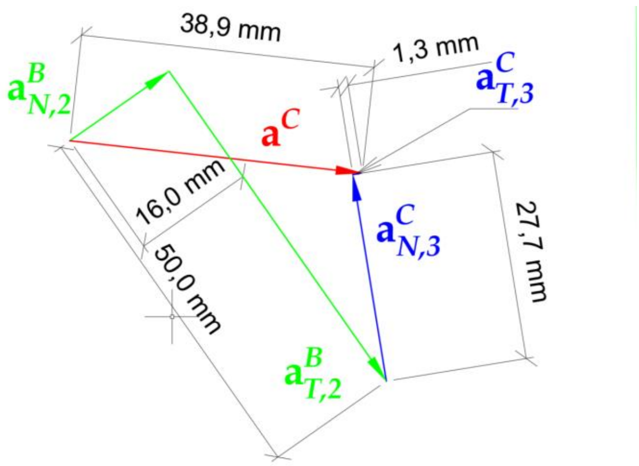
$$\boldsymbol{a}^C = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^C_{N,3} + \boldsymbol{a}^T_{T,3}$$

$$\boldsymbol{a}^C_{N,3} = -\omega_3^2 \cdot \boldsymbol{s}^C_3 = 27{,}7\ \mathrm{mm/s^2}\ \measuredangle 99°$$

$$\boldsymbol{a}^C_{T,3} = \alpha_3 \times \boldsymbol{s}^C_3 = 1{,}28\ \mathrm{mm/s^2}\ \measuredangle 9°$$

in iz poligona pospeškov dobimo (slika 96):

$$\boldsymbol{a}^C = 38{,}9\ \mathrm{mm/s^2}\ \measuredangle 354°$$



Slika 96. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke C (merilo 1:1).

Enačbo za določitev pospeška točke P zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^C + \boldsymbol{a}^P_{rel} + \boldsymbol{a}^P_{cor} + \boldsymbol{a}^P_{N,5} + \boldsymbol{a}^P_{T,5}.$$

Ročica 5 je povezana z ročico 3 z rotacijsko kinematično vezjo v točki C, torej lahko rečemo, da ročica 5 in z njo točka P relativno kroži okoli C. Hkrati je zaradi translatorne podpore znana smer pospeška točke P. Iz kotne hitrosti ročice 5 in relativne oddaljenosti točke P do točke C lahko določimo relativni normalni pospešek točke P in iz poligona hitrosti dobimo:

$$\boldsymbol{a}^P_{rel} = \boldsymbol{a}^P_{cor} = 0 \text{ mm/s}^2$$

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^B + \boldsymbol{a}^P_{N,5} + \boldsymbol{a}^P_{T,5}$$

$$\boldsymbol{a}^P_{N,5} = -\omega_5^2 \cdot \boldsymbol{s}^P_5 = 9{,}48 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 138°$$

$$\boldsymbol{a}^P_{T,5} = \measuredangle 48° \text{ ali } \measuredangle 228° \text{ (usmerjenost vektorja)}$$

$$\boldsymbol{a}^P = \measuredangle 165° \text{ ali } \measuredangle 345° \text{ (usmerjenost vektorja).}$$

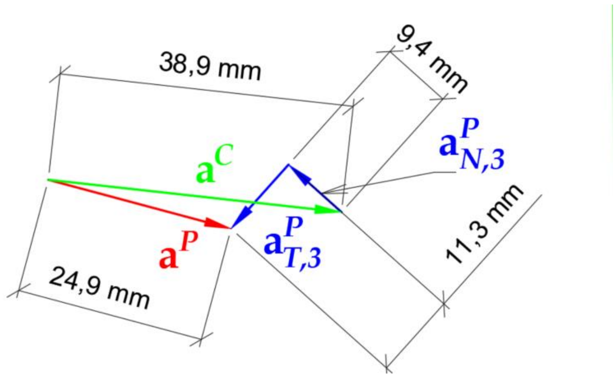
Iz poligona pospeškov dobimo (slika 97):

$$\boldsymbol{a}^P_{T,3} = 17{,}0 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 228°$$

$$\boldsymbol{a}^P = 11{,}7 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 345°,$$

ker lahko izračunamo tudi kotni pospešek ročice 3:

$$\boldsymbol{\alpha}_5 = \frac{\boldsymbol{a}^P_{T,5}}{\overline{CP}} = 0{,}31 \text{ rad/s}^2 \text{ (usmerjenost sourna).}$$



Slika 97. Poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (merilo 1:1).

Zgled 24b: Analiza večzgibnega mehanizma

Za lego mehanizma na sliki (slika 98), če je pogonska ročica 3 (***BD***), določite **hitrost** in **pospešek** točke ***P*** (smer in velikost). Pogonska ročica 3 (***BD***) se vrti relativno glede na ročico 2 okoli točke ***B*** sourno s konstantno kotno hitrostjo 1,0 rad/s.

Podatki:

$\overline{AB} = 100$ mm

$\overline{AE} = 40$ mm

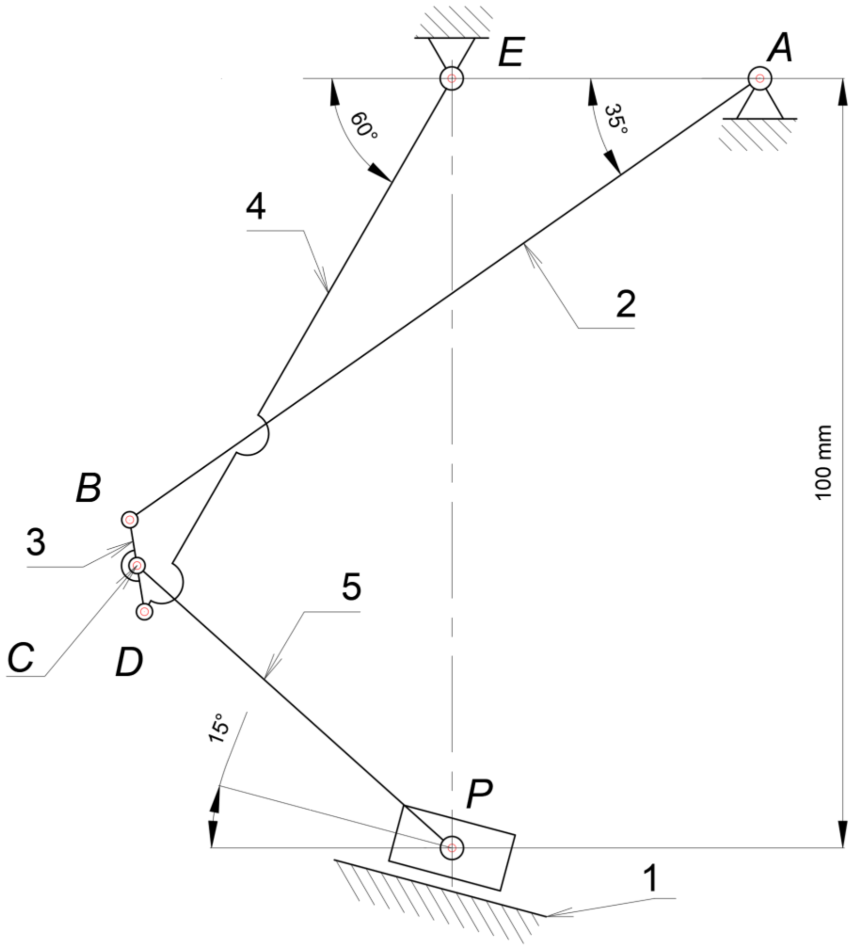
$\overline{BD} = 80$ mm

$\overline{BC} = \overline{CD}$

$\overline{CP} = 55$ mm

$\omega_{\overline{BD}} = 1{,}0$ rad/s

$\alpha_{\overline{BD}} = konst.$



Slika 98. Mehanizem – Zgled 24b (merilo 1:1).

Rešitev

Za določitev absolutnih hitrosti ročic mehanizma glede na podano relativno kotno hitrost ročice 3 proti ročici 2 je treba za dani položaj mehanizma določiti razmerje absolutnih kotnih hitrosti ročice 3 proti ročici 2 (prikazan postopek je podan na podlagi lokacije polov hitrosti):

Merilo hitrosti : 10 mm : 10 mm/s^2 in merilo pospeškov: 10 mm : 10 mm/s^2

$\boldsymbol{\omega}_{3-2} = \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_2 = 1$ rad/s (usmerjenost sourna),

$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^{\overline{P_{12}P_{23}}} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{s}_2^{\overline{P_{13}P_{23}}}$,

$(\boldsymbol{\omega}_{3-2} + \boldsymbol{\omega}_3) \times \boldsymbol{s}^{\overline{P_{12}P_{23}}} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{s}^{\overline{P_{13}P_{23}}}$,

$\omega_3 = \omega_{3-2} \cdot s_2^{\overline{P_{12}P_{23}}} = \omega_3 \left(s_2^{\overline{P_{12}P_{23}}} - s^{\overline{P_{13}P_{23}}}\right)$,

$$\omega_3 = \frac{\omega_{3-2} \cdot s_2^{\overline{P_{12}P_{23}}}}{s_2^{\overline{P_{12}P_{23}}} - s^{\overline{P_{13}P_{23}}}} = 1{,}22 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2 = 0{,}22 \text{ rad/s}.$$

Določitev hitrosti točk *B, D, C* in *P* ter kotnih hitrosti ročic 4 in 5 lahko sedaj izvedemo po postopku, opisanem v Zgledu 24a pod točko 5. Rezultati so navedeni spodaj.

$$\boldsymbol{v}^B = 22 \text{ mm/s} \measuredangle 125°,$$

$$\boldsymbol{v}^D = 31{,}3 \text{ mm/s} \measuredangle 150°,$$

$$\boldsymbol{v}^C = 26{,}1 \text{ mm/s} \measuredangle 140°,$$

$$\boldsymbol{v}^P = 29{,}3 \text{ mm/s} \measuredangle 165°,$$

$$\omega_4 = 0{,}33 \text{ rad/s},$$

$$\omega_5 = 0{,}23 \text{ rad/s},$$

$$\alpha_2 = 0{,}28 \text{ rad/s}^2,$$

$$\alpha_3 = 0{,}37 \text{ rad/s}^2,$$

$$\alpha_4 = 0{,}23 \text{ rad/s}^2,$$

$$\alpha_5 = 0{,}09 \text{ rad/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}_5 = 2{,}5 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 345°.$$

Zgled 25: Analiza ročičnega mehanizma (stopnja težavnosti 4)

Za lego mehanizma na sliki (slika 99), če je pogonska ročica 2 (***AB***), določite **hitrost** in **pospešek** točke ***P*** (smer in velikost). Pogonska ročica 2 (***AB***) se vrti sourno s konstantno kotno hitrostjo 1,0 rad/s.

Podatki:

$\overline{AB} = 40\ \text{mm}$

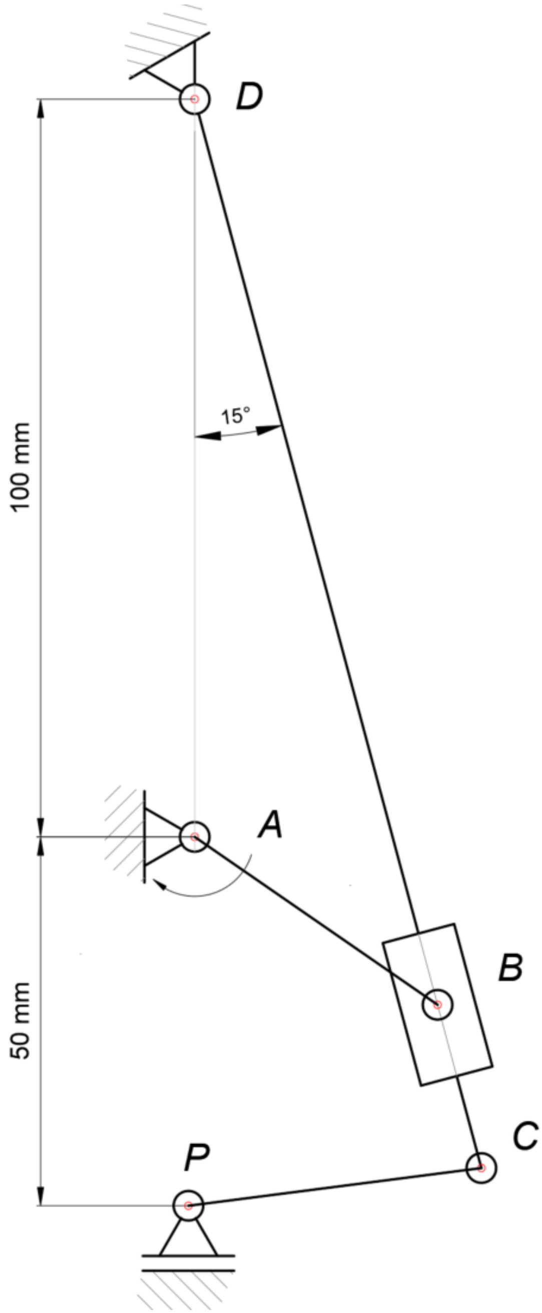
$\overline{AD} = 100\ \text{mm}$

$\overline{DC} = 150\ \text{mm}$

$\overline{CP} = 40\ \text{mm}$

$\omega_{\overline{AB}} = 1{,}0\ \text{rad/s}$

$\alpha_{\overline{AB}} = 0{,}0\ \text{rad/s}^2$



Slika 99. Mehanizem – zgled 25 (merilo 1:1).

Rešitev:

Ročica 2 rotira okoli točke *A*, okoli katere zato kroži druga končna točka *B*, katere (tangencialna) hitrost znaša:

Merilo hitrosti : 10 mm : 10 mm/s² in merilo pospeškov: 10 mm : 10 mm/s²

$$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{v}^A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B,$$

$$\boldsymbol{v}^A = 0 \text{ mm/s},$$

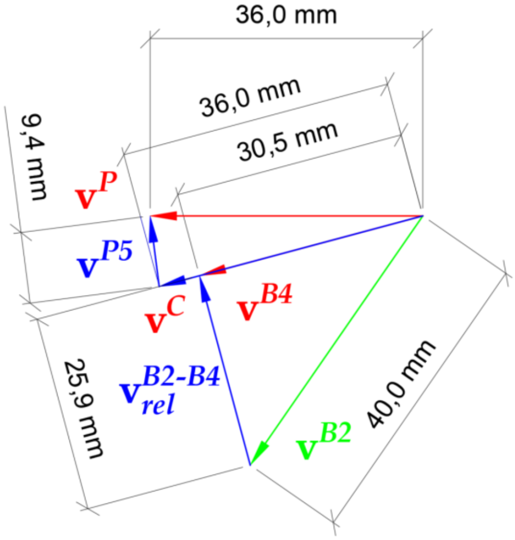
$$\boldsymbol{v}^B = \boldsymbol{v}_2^B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{s}_2^B = 40 \text{ mm/s} \measuredangle 235{,}5°.$$

S pomočjo poligona hitrosti (slika 100) določimo še hitrost ročice 4 na lokaciji točke B. Ker sta ročici 2 in 4 povezani preko drsnika, je med točkama B_2 in B_4 relativna hitrost:

$$\boldsymbol{v}^{B4} = \boldsymbol{v}^{B2} + \boldsymbol{v}_{rel}^{B4-B2},$$

$$\boldsymbol{v}^{B4} = 30{,}5 \text{ mm/s} \measuredangle 195°,$$

$$\boldsymbol{v}_{rel}^{B4-B2} = 25{,}9 \text{ mm/s} \measuredangle 105°.$$



Slika 100. Poligon hitrosti (merilo 1:1).

Izračunamo lahko še kotno hitrost ročice 4 in hitrost točke C:

$$\omega_4 = \frac{v^{B4}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{14}}} 0{,}24 \text{ rad/s},$$

$$\boldsymbol{v}^C = \boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{s}_4^C = 36{,}0 \text{ mm/s} \measuredangle 195°.$$

Izračunamo še poligon hitrosti za določitev hitrosti točke P:

$$\boldsymbol{v}^P = \boldsymbol{v}^C + \boldsymbol{v}_5^P,$$

$$\boldsymbol{v}^P = 37{,}3 \text{ mm/s} \measuredangle 180°,$$

$$\boldsymbol{v}_5^P = 9{,}4 \text{ mm/s} \measuredangle 97{,}3°,$$

$$\omega_5 = \frac{v_5^P}{\overline{CP}} = 0{,}24 \text{ rad/s}.$$

Enačbo za določitev pospeška točke B lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^P = \boldsymbol{a}^C + \boldsymbol{a}_{rel}^P + \boldsymbol{a}_{cor}^P + \boldsymbol{a}_{N,5}^P + \boldsymbol{a}_{T,5}^P.$$

Zaradi konstantne hitrosti rotacije ročice 2 in toge povezave med točkama A in B lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{a}_{rel}^{B2} = \boldsymbol{a}_{cor}^{B2} = \boldsymbol{a}_{T,3}^{B2} = 0 \text{ mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}^{B2} = \boldsymbol{a}_{N,2}^{B2} = -\omega_2^2 \cdot \boldsymbol{s}_2^{B2} = 40{,}0 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 145{,}5°.$$

Če izhajamo iz točke D, pa lahko enačbo za določitev pospeška točke $B2$ zapišemo:

$$\boldsymbol{a}^{B2} = \boldsymbol{a}_{N,2}^{B2} = \boldsymbol{a}^{D} + \boldsymbol{a}_{rel}^{B2-B4} + \boldsymbol{a}_{cor}^{B2-B4} + \boldsymbol{a}_{N,4}^{B4} + \boldsymbol{a}_{T,4}^{B4},$$

$$\boldsymbol{a}^{D} = 0\ \text{mm/s}^2,$$

$$\boldsymbol{a}_{N,4}^{B4} = -\omega_4^2 \cdot \boldsymbol{s}_4^{B4} = 7{,}32\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 105°,$$

$$\boldsymbol{a}_{cor}^{B2-B4} = 2\boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{v}_{rel}^{B2-B4} = 12{,}43\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 195°,$$

$$\boldsymbol{a}_{T,4}^{B4} = \alpha_2 \times \boldsymbol{s}_4^{B4} = \ldots ?\measuredangle 15°\ \text{ali}\ 195°.$$

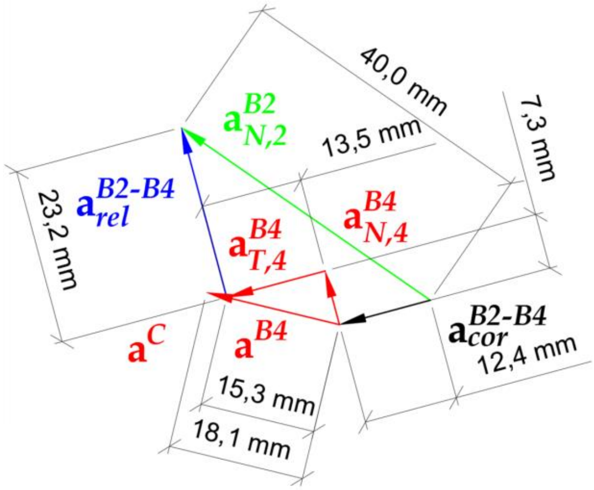
Iz poligona pospeškov lahko določimo (slika 101):

$$\boldsymbol{a}_{T,4}^{B4} = 13{,}5\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 195°$$

$$\boldsymbol{a}_{rel}^{B2-B4} = 23{,}2\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 115°$$

in

$$\alpha_4 = \frac{\boldsymbol{a}_{T,4}^{B4}}{\overline{DB4}} = 0{,}11\ \text{rad/s}^2.$$



Slika 101. Poligon pospeškov (merilo 1:1).

Upoštevamo pospešek točke C:

$$\boldsymbol{a}^{C} = 18{,}1\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 166°$$

in poligon pospeškov za določitev pospeška točke P (slika 102):

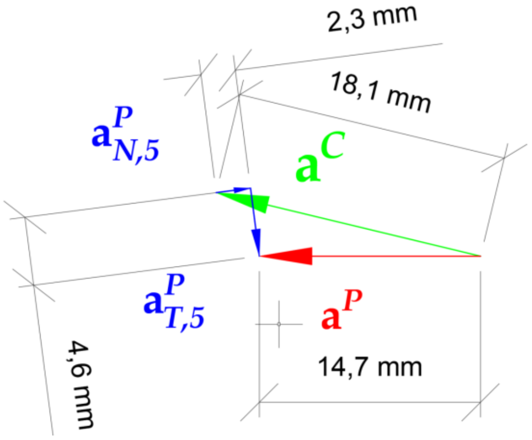
$$\boldsymbol{a}^{P} = \boldsymbol{a}^{C} + \boldsymbol{a}_{N,5}^{P} + \boldsymbol{a}_{T,5}^{P},$$

$$\boldsymbol{a}_{N,5}^{P} = -\omega_5^2 \cdot \boldsymbol{s}_5^{P} = 2{,}3\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 7{,}3°$$

ter dobimo:

$$\boldsymbol{a}_{t,5}^{P} = 4{,}6\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 277{,}3°,$$

$$\boldsymbol{a}^{P} = 14{,}7\ \text{mm/s}^2\ \measuredangle 0°.$$



Slika 102. Poligon pospeškov (merilo 2:1).

Zgled 26: Oblikovanje krivuljnega mehanizma

Za krivuljni mehanizem s točkovnim dotikom slednika določite maksimalni hod slednika za dano fazo in kinematične (»*svaj*«) diagrame gibanja slednika dane faze pri naslednjih pogojih:

- potek pospeška: $a = \frac{2\pi h}{\beta^2}\left(\sin 2\,\pi\frac{\theta}{\beta}\right)$, θ ... parameter, β ... trajanje faze
- faza: $\pi/4 \leq \phi < \frac{3\pi}{4}$,
- vrtilna hitrost odmične krivulje: $\omega = 20$ rad/s,
- največji dovoljeni pospešek slednika: $a_{\max} = 40$ m/s^2,
- hitrost na začetku in koncu faze je enaka 0 m/s in
- položaj slednika na začetku enak 0 m.

<u>Rešitev</u>

Za podano fazo velja:

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \phi - \frac{\pi}{4}$$

in enačbo poteka pospeška lahko zapišemo:

$$a = \frac{2\pi h}{\frac{\pi^2}{4}}\left(\sin 2\,\pi\frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}\right)\omega^2 = \frac{8h}{\pi}(\sin 4\,\theta)\omega^2.$$

Iz največjega dovoljenega pospeška slednika lahko določimo maksimalni hod slednika:

$$h = \frac{a\pi}{8\,(\sin 4\,\theta)\,\omega^2},$$

$$h_{\max} = \frac{a_{\max}\,\pi}{8(\sin 4\ \theta)\omega^2} \rightarrow \theta \sim \frac{\pi}{4} \quad oz. \ \ \phi \sim \frac{\pi}{2}.$$

Dobimo:

$$h_{\max} = \frac{a_{\max}\,\pi}{8\omega^2} = 0{,}0393 \ \text{m}.$$

<u>Določitev »*svaj*« diagramov oz. poteka poti, hitrosti, pospeška in spremembe pospeška:</u>

- pospešek:

$$a(\theta) = \frac{8h}{\pi}(\sin\theta)\omega^2 \ \text{oz.} \quad a(\phi) = \frac{8h}{\pi}\left(\sin(\ \phi - \frac{\pi}{4})\right)\omega^2,$$

- spremememba pospeška:

$$j(\phi) = \dot{a} = \frac{8\pi^2 h}{\beta^3}\left(\cos 2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\omega^3 = \frac{32h}{\pi}\left(\cos 4\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right)\omega^3,$$

$$j_{\max}\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{32h}{\pi}\omega^3 = 3202{,}5\ \mathrm{m/s^3},$$

- hitrost:

$$v(\theta) = \int a(\theta)\cdot d\theta = \int \frac{2\pi h}{\beta^2}\left(\sin 2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\cdot d\theta,$$

$$v(\theta) = -\frac{h}{\beta}(\cos 4\,\theta) + A_1 = -\frac{h}{\beta}(\cos 4\,\theta) + A_1,$$

$$v(\phi) = -\frac{2h}{\pi}\left(\cos 4\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right) + A_1.$$

Začetni pogoji in določitev konstant:

$$v\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = 0\ \ \mathrm{m/s},$$

$$v\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2h}{\pi}(\cos(\,0)) + A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{2h}{\pi}.$$

Dobimo funkcijo hitrosti:

$$v(\phi) = \frac{2h}{\pi}\left[1 - \left(\cos 4\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right]\omega,$$

$$v_{\max}\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cdot 39{,}3\ \mathrm{m}}{\pi}[1+1] = 1{,}0\ \mathrm{m/s},$$

- pomik:

$$s(\theta) = \int v(\theta)\cdot d\theta = \int \frac{h}{\beta}\left(1 - \cos 2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\cdot d\theta,$$

$$s(\theta) = \frac{h}{\beta}\left(\theta - \frac{\beta}{2\pi}\sin 2\pi\frac{\theta}{\beta}\right) + A_2,$$

$$s(\theta) = \frac{2h}{\pi}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\,\theta\right) + A_2.$$

Začetni pogoji in določitev konstant:

$$s\left(\phi = \frac{\pi}{4}\right) = 0\ \ \mathrm{m},$$

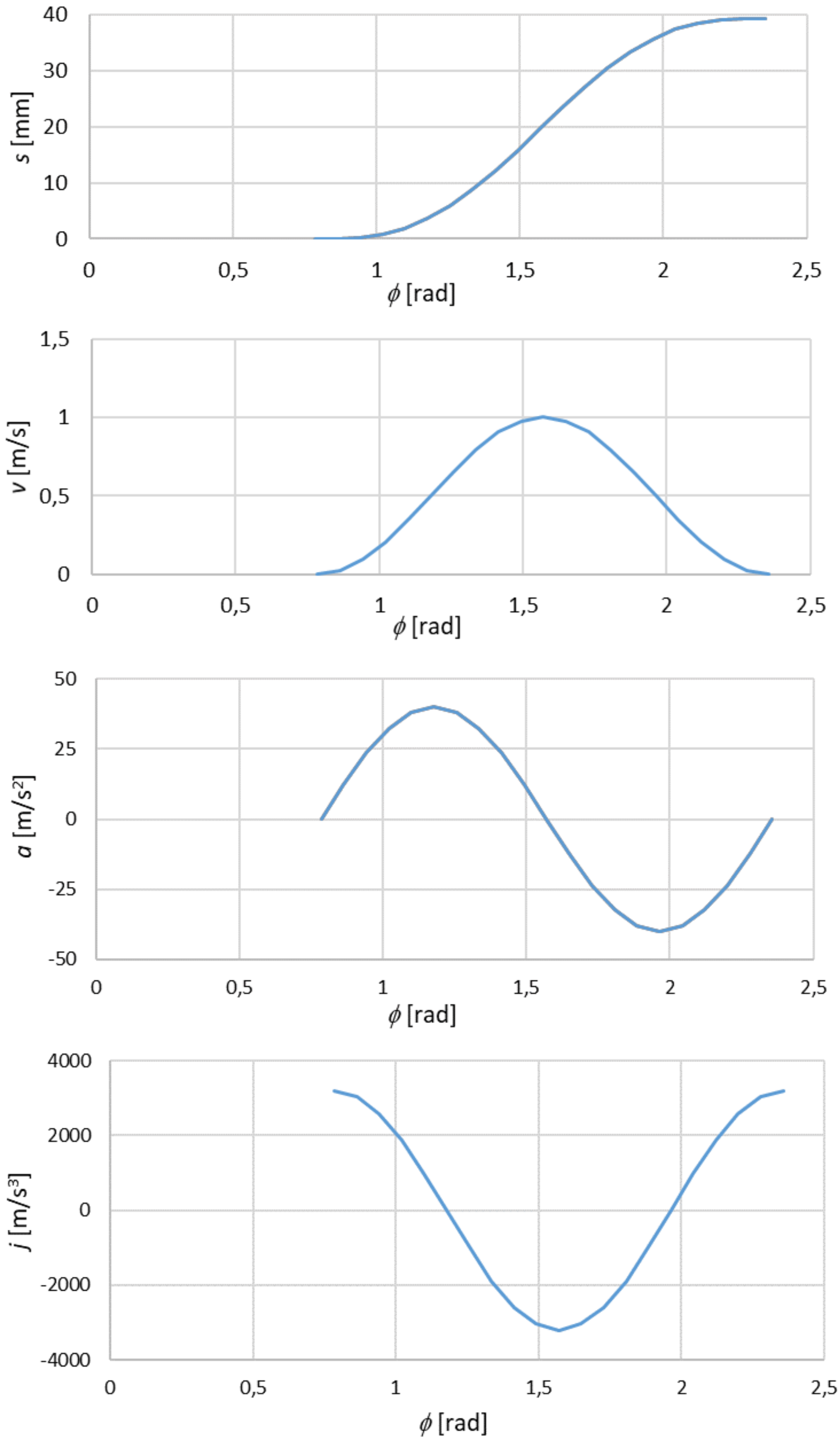
$$s(\phi = \frac{\pi}{4}) = \frac{2h}{\pi}\left((\phi - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}\sin(\,\pi)\right) + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0.$$

Dobimo funkcijo pomika:

$$s(\phi) = \frac{2h}{\pi}\left(\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\sin 4\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$s_{\max}\left(\phi = \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2h}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) = 0{,}0393\ \ \mathrm{m}.$$

Slika 103 prikazuje potek pomika, hitrosti, pospeška in spremembe pospeška (»*svaj*« diagram) gibanja slednika za dano fazo.



Slika 103. »*svaj*« diagrami gibanja slednika.

Viri

[1] http://auto.howstuffworks.com/car-suspension4.htm (25.03.2016).

[2] www.hexapod.fr (14.09.2012).

[3] http://www.carsim.com/products/ds/images/8-DOF-system.JPG (14.09.2012) .

[4] ADAMS/View 2021, MSC Software Corporation 2021, ZDA

[5] Hesse S.: Clamping with compressed air and vacuum. Blue Digest on Automation, Fest AG & Co, 2001.

[6] Prebil I., Krašna S., Ciglarič I.: Synthesis of four-bar mechanism in a hydraulic support using a global optimization algorithm. Struct. multidiscipl. optim. (Print), 2002, letn. 24, št. 3, str. 246-251.

[7] http://www.rlv.si/si/imagelib/zoom/default/Fotogalerija/2010/Novi%20odkop/DSC_5875c.jpg (25.03.2016).

[8] Uicker J.J., Pennock G.R., Shigley J.E.: Theory of machines and mechanisms, 3. izdaja, 2003, Oxford University Press.

[9] A. Rivola, M. Troncossi, G. Dalpiaz, A. Carlini: Elastodynamic analysis of the desmodromic valve train of a racing motorbike engine by means of a combined lumped/finite element model. Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 21, Issue 2, February 2007, Pages 735–760.

Dodatna priporočena literatura

- Norton R.L.: Design of Machinery; 6. izdaja, McGraw-Hill, ZDA, 2020.
- Norton R.L.: Cam Design and Manufacturing Handbook, (Volume 1); 2. izdaja, Industrial Press, Inc., ZDA, 2009.
- Rothbart H.A.: Cam Design Handbook; 1. izdaja, McGraw Hill, ZDA, 2003.
- Sclater N.: Mechanisms and Mechanical Devices; 5. izdaja, McGraw Hill, ZDA, 2011.
- Hartenberg R., Danavit J.: Kinematic Synthesis of Linkages. New York: McGraw-Hill, 1964.