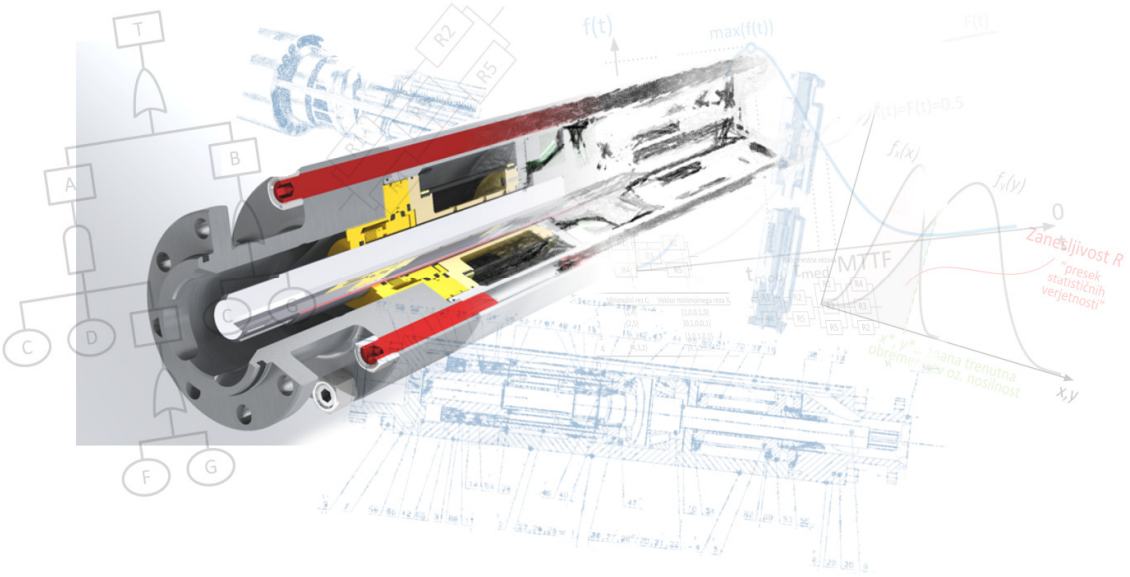
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Aleš Gosar, Simon Oman, Jernej Klemenc, Marko Nagode

Konstruiranje naprednih sistemov

Uporaba teoretičnih izhodišč na praktičnem primeru

in z računskimi nalogami



Ljubljana, 2026

Naslov publikacije:	Konstruiranje naprednih sistemov: Uporaba teoretičnih izhodišč na praktičnem primeru in z računskimi nalogami
Avtorji:	as. dr. Aleš Gosar izr. prof. dr. Simon Oman prof. dr. Jernej Klemenc prof. dr. Marko Nagode
Strokovna recenzenta:	prof. dr. Srečko Glodež in izr. prof. dr. Domen Šeruga
Lektoriranje besedila:	Aleksandra Repe, univ. dipl. slov.
Prelom in priprava za tisk:	as. dr. Aleš Gosar
Založba:	Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo
Tisk:	Elektronski izvod
Izdaja:	1. izdaja
Leto izdaje:	2026
Naslovnica knjige:	Aleš Gosar
URL:	*https://www.fs.uni-lj.si/publication/konstruiranje-naprednih-sistemov/*

© Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2026

Avtorske pravice pridržane. Gradiva iz publikacije ni dovoljeno kopirati, objavljati ali prevajati v druge jezike brez pisnega dovoljenja založbe.

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 300605443
ISBN 978-961-7187-33-5 (PDF)

Aleš Gosar, Simon Oman, Jernej Klemenc, Marko Nagode

Konstruiranje naprednih sistemov

Uporaba teoretičnih izhodišč na praktičnem primeru

in z računskimi nalogami

Predgovor

Ta knjiga je namenjena študentom kot gradivo za vaje pri predmetu Konstruiranje naprednih sistemov. Verjamemo, da so vsebine zanimive in bo zato knjiga lahko v pomoč tudi drugim, ki se pri študiju ali delu srečujejo vrednotenjem na zanesljivost in s konstruiranjem kompleksnih izdelkov.

Glavni namen obravnavanih tematik je dopolniti vsebine teoretičnih predavanj s primeri preračunov in razmisleki pri bolj praktičnih vprašanjih in kvalitativnih metodah vrednotenja. Prav zaradi tega smo vključili zgolj ključna teoretična izhodišča in končne enačbe, ki so sicer matematično izpeljane in poglobljeno utemeljene na predavanjih, v tem delu pa smo se osredotočili na praktično uporabo enačb pri reševanju nalog in za utemeljevanje razvojnih odločitev.

Rdeča nit, ki povezuje poglavja, je predstavitev vsebin na primeru razvoja aksialne batne črpalke za črpanje tekočin z nizko gostoto in viskoznostjo, pri visokih temperaturah in velikih tlačnih razlikah. Poleg računske vaje in primerov nalog za utrjevanje znanja, so tako ob koncu vsakega poglavja s pomočjo skic, slik, tehničnih risb in komentarjev vsebine praktično uporabljene še na primeru črpalke. Upamo, da bo to olajšalo študij in pripomoglo k razmisleku za nove, boljše in zanesljivejše tehnične rešitve ter izdelke.

Nazadnje bi se želeli zahvaliti vsem, ki so kakor koli pripomogli pri nastanku tega dela, vsem bralcem in uporabnikom pa želimo čim več novih inženirskih spoznanj in uspešen študij.

Avtorji Ljubljana, februar 2026

Kazalo vsebine

1 Uvod 1

2 Osnove statistične analize 2

2.1 Uvod 2
2.2 Osnove statističnih modelov 3

2.2.1 Histogram 4
2.2.2 Kumulativna porazdelitvena funkcija 7

3 Osnovni modeli zanesljivosti 11

3.1 Osnovni pojmi 11

3.1.1 Zanesljivost 11
3.1.2 Srednji čas do okvare 12
3.1.3 Medialni čas do okvare 13
3.1.4 Modalni čas do okvare 13
3.1.5 Varianca časov okvar 13
3.1.6 Intenzivnost okvar 13

3.2 Osnovne porazdelitvene funkcije 14

3.2.1 Eksponentna porazdelitvena funkcija 15
3.2.2 Normalna oziroma Gaussova porazdelitvena funkcija 16
3.2.3 Weibullova porazdelitvena funkcija 18
3.2.4 Računske naloge 26

4 Konstrukcijska naloga 31

4.1 Definicija projektne naloge 31
4.2 Razvojni V-model 34

5 Osnovna struktura izdelka 36

5.1 Funkcionalne zahteve 36
5.2 Določitev obremenitev v sistemu 37

6 Modularnost 39

6.1 Teoretična izhodišča osnovnih vezav komponent v sistem 41
6.2 Redundanca na visokem in nizkem nivoju 42
6.3 Poseben primer: *k* od *n* vezava 43
6.4 Teoretična izhodišča kompleksnih vezav komponent v sistem 46

6.4.1 Metoda dekompozicije 46
6.4.2 Metoda naštevanja 47
6.4.3 Metoda funkcijske strukture 48
6.4.4 Računske naloge 56

6.5 Alokacija zanesljivosti 58

6.5.1 Optimalna alokacija ... 58
6.5.2 ARINC-metoda ... 59
6.5.3 AGREE-metoda ... 60
6.5.4 Računske naloge ... 62

7 Razvoj in izdelava ... 64

7.1 Odločitev »izdelaj ali kupi« (*angl. »Make or Buy«)* ... 64
7.2 Teoretične osnove za statične modele zanesljivosti ... 68

7.2.1 Naključna obremenitev in konstantna nosilnost ... 69
7.2.2 Konstantna obremenitev in naključna nosilnost ... 70
7.2.3 Naključna obremenitev in naključna nosilnost ... 70
7.2.4 Računske naloge ... 73

8 Validacija izdelka ... 75

8.1 Analiza možnih okvar in njihovih posledic (FMEA) ... 75
8.2 Analiza varnosti in drevesa okvar (FTA) ... 81

8.2.1 Računske naloge ... 85

9 Vzdrževanje in reciklaža ... 86

9.1 Priprava načrta vzdrževanja ... 86
9.2 Vrednotenje na vzdrževalnost ... 87

9.2.1 Smernice pristopanja k vzdrževanju kompleksnih sistemov ... 89
9.2.2 Vpliv preventivnega vzdrževanja na zanesljivost ... 90
9.2.3 Zanesljivost in preventivno vzdrževanje ... 91
9.2.4 Računske naloge ... 92

9.3 Razgradnja in reciklaža ... 93

10 Literatura ... 100

Priloga 1: Podatki meritve ... 103

Priloga 2: Standardizirana normalna spremenljivka $\Phi(z)$ ... 104

Priloga 3: Funkcija gama $\Gamma(x)$ ... 111

Priloga 4: Pravila za računanje s funkcijo gama $\Gamma(x)$ ... 112

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
A, B, C	/	Dogodek
b	h, dan, leto	Odsek na ordinatni osi
B_i	/	Zgornja meja zanesljivosti komponente
c_i	/	Faktor dviga stroška za izboljšanja zanesljivosti po komponenti
C	/	Funkcija stroškov povečanja zanesljivosti
$C_i(x)$	/	Funkcija stroškov povečanja zanesljivosti po komponenti
D	mm	Zunanji premer
E_i	/	Osnovni dogodek
$f(t)$	/	Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti
f_i	/	Relativna frekvenca
f_i^*	/	Normirana relativna frekvenca
$f_{\mathrm{x}}(t)$	/	Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti obremenitve
$f_{\mathrm{y}}(t)$	/	Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti nosilnosti
$F(t)$	/	Kumulativna porazdelitvena funkcija
F_i	/	Ocena vrednosti kumulativne porazdelitvene funkcije
$F_{\mathrm{x}}(x)$	/	Kumulativna porazdelitvena funkcija obremenitve
$F_{\mathrm{y}}(x)$	/	Kumulativna porazdelitvena funkcija nosilnosti
h	m	Dobavna višina
$h(t)$	/	Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti
$H(t)$	/	Kumulativna porazdelitvena funkcija
k	/	Smerni koeficient
K	N, MPa	Nosilnost
m	/	Število intervalov histograma
M_i	/	Minimalni rez

$MTTF$	h, dan, leto	Srednji čas do okvare
$MTTR$	h, dan, leto	Srednji čas popravila
n_i	/	Pogostost oz. število realizacij v posameznem intervalu
n_i	/	Število komponent modula
n	/	Velikost vzorca
n	/	Binomski člen
N	/	Število vseh modulov
$p(x)$	/	Binomsko porazdeljena naključna spremenljivka
Pr	/	Statistična verjetnost
q	L/min	Pretok
$R(t)$	/	Funkcija zanesljivosti
$R_i(t)$	/	Zanesljivost komponente
$R_{\mathrm{PM}}(t)$	/	Zanesljivost ob vzdrževanju
$R_{\mathrm{s}}(t)$	/	Zanesljivost sistema
$R_{\mathrm{s}}^*(t)$	/	Ciljna zanesljivost sistema
RPN	/	Indeks kritičnosti potencialnih učinkov okvar
RPN^*	/	Novi indeks kritičnosti potencialnih učinkov okvar
S	N, MPa	Obremenitev
t_{med}	h, dan, leto	Medialni čas
t_{mode}	h, dan, leto	Modalni čas
Δt	h, dan, leto	Časovni interval, sprememba časa
t	h, dan, leto	Čas, realizacija naključne spremenljivke T
T	h, dan, leto	Naključna spremenljivka časa
T	/	Zgornji (»top«) dogodek
T_0	h, dan, leto	Čas utekanja
T_{PM}	h, dan, leto	Čas do prvega preventivnega vzdrževanja

w_i	/	Utež
X	N, MPa	Naključna spremenljivka obremenitve
X_i	/	Člen funkcijske strukture
Y	N, MPa	Naključna spremenljivka nosilnosti
z	/	Normalno porazdeljena naključna spremenljivka
β	/	Oblikovni faktor
θ	h, dan, leto	Velikostni faktor
θ	/	Lagrangeev multiplikator
μ	h, dan, leto	Povprečni čas
μ_{x}	N, MPa	Povprečna obremenitev
μ_{y}	N, MPa	Povprečna nosilnost
$\lambda(t)$	okvar/enota časa	Funkcija intenzivnosti okvar
λ_i	okvar/enota časa	Intenzivnosti okvar komponente
$\lambda_{\mathrm{s}}^{*}(t)$	okvar/enota časa	Funkcija ciljne intenzivnosti okvar
σ	h, dan, leto	Standardna deviacija
σ_{x}	N, MPa	Standardna deviacija obremenitve
σ_{y}	N, MPa	Standardna deviacija nosilnosti
σ	h^2, dan^2, $leto^2$	Varianca
$\Phi(z)$	/	Funkcija Laplaceove transformacije
$\Psi(X)$	/	Funkcijska struktura

Indeksi	
1,2,3	Zaporedni indeksi
i, j	Zaporedni indeksi
maks	Zgornja meja, indikator največje vrednosti
min	Spodnja meja, indikator najmanjše vrednosti

Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšave	
$AGREE$	*angl. Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment*
$ARINC$	*angl. Aeronautical Radio, Incorporated*
CFR	Konstantna intenzivnost okvar (*angl. Constant failure rate*)
$FMEA$	Analiza možnih okvar in njihovih posledic (*angl. Failure Modes and Effects Analysis*)
FTA	Analiza varnosti in drevesa okvar (*angl. Fault Tree Analysis*)
MLE	Metoda največjega verjetna (*angl. Maximum likelihood estimator*)
MMR	Metoda medialnih rangov (*angl. Median Ranks Method*)
OEM	Proizvajalec originalne opreme (*angl. Original equipment manufacturer*)

1 Uvod

Predmet Konstruiranje naprednih sistemov študentom ponuja pregled ključnih korakov konstruiranja in podaja razmisleke, postopke ter preračune potrebne za vrednotenje sodobnih – tehnično zahtevnih izdelkov.

Vsebinsko se osredotoča predvsem na tematike s področja koncipiranja in snovanja izdelka, tematike vezane na določevanje zanesljivosti, redundance osnovnih in kompleksnih sistemov, podaja osnove in razmisleke za odločitve o izdelavi, odpravljanju napak in vzdrževanju, ter nenazadnje daje priporočila za snovanje izdelkov z mislijo na odgovorno odstranitev in reciklažo surovin po končani dobi uporabe.

V poglavjih predloge so predstavljeni ključni poudarki in končne enačbe za izračune, medtem ko so njihove matematične izpeljave in poglobljene utemeljitve predstavljamo v drugi literaturi: M. Nagode: skripta predavanj [1] in M. Nagode et al.: Snovanje izdelkov z vidika zanesljivosti [2]) in ostali relevantni literaturi [3,4], po kateri so povzete izbrane vsebine te predloge.

V želji po čim boljšem razumevanju tematik so ob koncu vsakega poglavja predstavljene ideje in razmisleki uporabljeni tudi na enotnem praktičnem primeru, ki povezuje predlogo v celoto. Izbrani praktični primer prikazuje razvoj nove generacije črpalk za črpanje tekočin z nizko viskoznostjo pri velikih tlačnih razlikah in temperaturi [5–7], ki smo jo razvili na Katedri za strojne elemente in razvojna vrednotenja.

Zgradba posameznega poglavja: poglavja si sledijo v logičnem zaporedju, ki ga definira (referenčni) razvojni V-model. V poglavjih je najprej na kratko predstavljena vsebina, sledijo kratek povzetek ključnih računskih postopkov, krajši računski primer in nato še utemeljitev na praktičnem primeru črpalke. Kjer je mogoče, je iz [3] izbranih nekaj dodatnih računskih nalog z rešitvami kot pomoč pri utrjevanju znanja.

2 Osnove statistične analize

2.1 Uvod

Statistično analizo potrebujemo takrat, ko želimo opisati (modelirati) naključne pojave in dogodke, katerih realizacija je po definiciji negotova, kot so na primer pihanje vetra na lokaciji, potresi v regiji, promet na cestnem odseku ipd. Pri opisu si pomagamo z beleženjem realizacije naključnih spremenljivk, ki pojav najbolje predstavljajo, npr. hitrost vetra, amplituda potresa in število vozil na odseku. V strojništvu je pogosto opazovana naključna spremenljivka, vezana na čas oz. število obremenitvenih ciklov do odpovedi komponente ali sistema (kritični dogodek). Če ni zapisano drugače, v tej knjigi naključna spremenljivka predstavlja čas do kritične odpovedi, označen pa je z malim tiskanim t, pa tudi T, s katerim bomo na določenih mestih pomagali ločevati med splošnim časom (naključna spremenljivka) in točno določeno vrednostjo časa t.

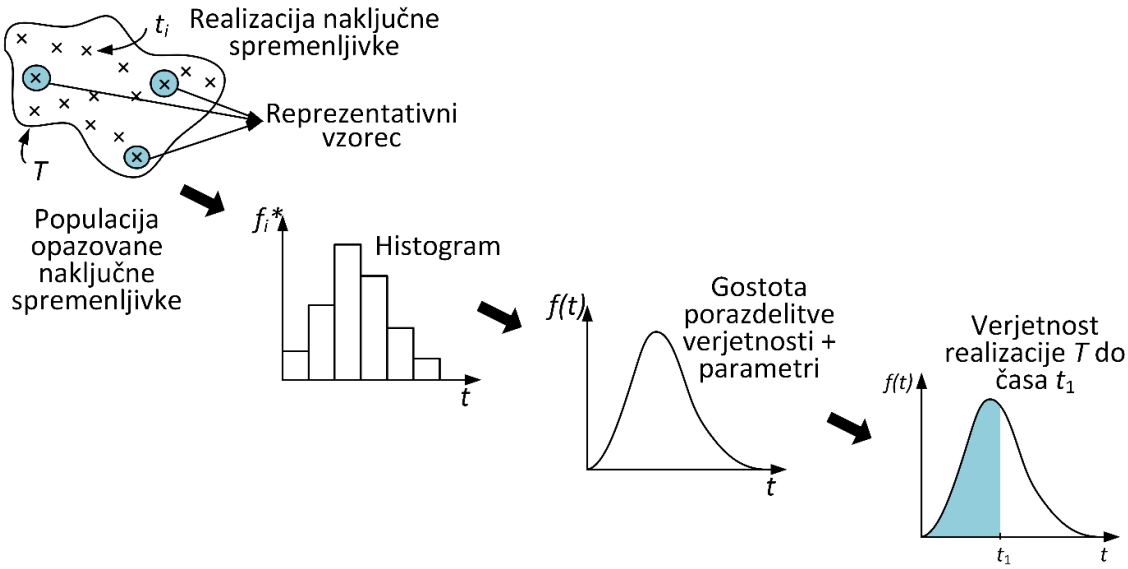
Opomba: v literaturi in v nekaterih primerih tudi v tej knjigi so uporabljene tudi bolj splošne oznake, npr. X oz. Y in x oz. y, saj si, kot prej omenjeno, za naključno spremenljivko lahko izbere kateri koli fizikalni količino ali drugo opazovano veličino.

V naslednjem poglavju bomo pokazali praktični postopek izdelave histograma in računski postopek za določitev zvezne funkcije gostote porazdelitve verjetnosti. Nato bomo pokazali več različnih matematičnih oblik, ki omogočajo opis najrazličnejših primerov realizacije naključne spremenljivke. Za vsako od prikazanih porazdelitvenih funkcij bomo podali pripadajoče kumulativne funkcije, postopek pa prikazali na praktičnem primeru naloge.

2.2 Osnove statističnih modelov

Za določitev zanesljivosti[1] delovanja komponente ali izdelka je treba najprej izbrati pomenljivo fizikalno količino – naključno spremenljivko, ki jo bomo z opazovanjem in merjenjem uporabili pri statističnem vrednotenju. V uvodu je podan strojniški primer beleženja časa do porušitve oz. dobe trajanja komponente. Ker preverjanje dobe trajanja vseh komponent (populacija) ni smiselno, iz populacije vzamemo samo nekaj naključno izbranih komponent (reprezentativni vzorec), ki jih uporabimo za določitev statističnih parametrov. Vzorec mora biti dovolj velik (pogoji statističnega vrednotenja) in imeti lastnosti populacije (sklepanje na celotno populacijo).

Za izvedbo osnovne statistične analize je treba vzorec ustrezno obdelati in ovrednotiti. Nekaj ključnih korakov obdelave je grafično predstavljenih na Sliki 1, bolj podrobno pa je posamezni korak opisan v nadaljevanju poglavja.



Slika 1: Ključni koraki pri izvedbi osnovne statistične analize

[1] Nagode: Zanesljivost je verjetnost, da bo izdelek določen čas pri določenih pogojih uporabe in pogojih okolja opravljal zahtevane funkcije v okviru dopustnih odstopanj. Pred napovedjo zanesljivosti je treba jasno definirati okvare, jih povezati s funkcijami izdelka in izbrati enoto časa. Izbrani časovni interval je lahko opredeljen s koledarskim časom, v letih, urah ali s številom ciklov. Cikel je lahko obrat motorja, obremenitveni cikel ali blok časovne zgodovine obremenitve. Pogoji uporabe in pogoji okolja, v katerih izdelek obratuje, morajo ustrezati projektnim zahtevam.

2.2.1 Histogram

Realizacijo naključne spremenljivke precej dobro lahko predstavimo s pomočjo histograma. Ta prostor z zalogo vrednosti naključne spremenljivke razdeli na vnaprej izbrano število intervalov m in nato beleži pogostnost n realizacije naključne spremenljivke v posameznem intervalu. Primer: v časovnem intervalu 1, ki pokriva čas med začetkom uporabe izdelka $t_0 = 0$ s in $t_1 = t_0 + \Delta t$, je n_1 realizacij naključne spremenljivke-odpoved, v drugem (med t_1 in $t_2 = t_1 + \Delta t$) n_2 , v tretjem n_3 itd. Število intervalov m za nepristranskost analize lahko določimo po Sturgesovi formuli [8] kot:

$$m = INT(1 + 3{,}33 \cdot log(n)) \qquad (1)$$

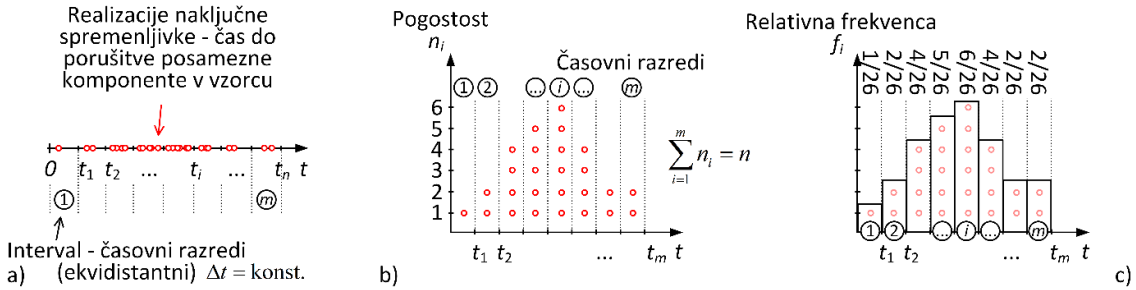
Razmerje med številom realizacij naključne spremenljivke po intervalih n_i glede na velikost vzorca n imenujemo relativna frekvenca f_i.

$$f_i = \frac{n_i}{n} \qquad (2)$$

Statistično gledano, f_i neposredno predstavlja verjetnost realizacije naključne spremenljivke med spodnjo (t_{i-1}) in zgornjo mejo (t_i) intervala. Vsota relativnih frekvenc je tako enaka verjetnosti realizacije naključne spremenljivke preko vseh intervalov, kar je gotov dogodek (npr. verjetnost porušitve je 1 oz. 100 %).

Ko z limitnem procesu širino intervala $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ zmanjšujemo proti 0, iz diskretnega histograma preidemo v zvezno funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$ (enačba (3)), ki je mera verjetnosti realizacije eksaktno določene vrednosti naključne spremenljivke, npr. verjetnost odpovedi točno pri času t_i.

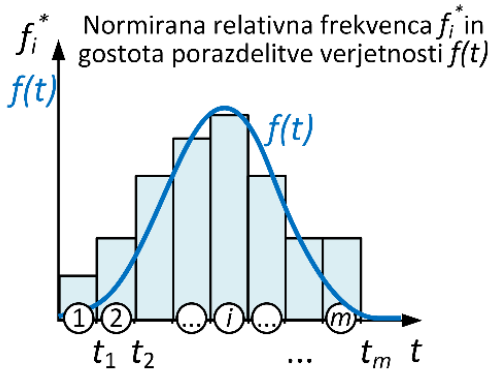
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}} f_i = f(t) \qquad (3)$$



Slika 2: Izdelava histograma a) meritev realizacije naključne spremenljivke, b) beleženje pogostosti in c) izračun relativne frekvence.

Če želimo primerjati histogram in funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti na istem diagramu (Slika 3), moramo vrednosti histograma normirati na širino intervala. Normirano relativno frekvenco za vsak interval izračunamo po enačbi (4), za vnaprej določen in konstanten Δt.

$$f_i^* = \frac{f_i}{\Delta t} \qquad (4)$$



Slika 3: Graf gostote porazdelitve verjetnosti.

Računski primer

Za tabelo dvestotih meritev časov do porušitve v sekundah (Priloga 1: Podatki meritve) določite histogram.

Koraki postopka:

1. Ugotovimo dejansko časovno zalogo vrednosti vzorca med $t_{\min}$ in t_{maks}, ustrezno časovno enoto (sekunde, minute …) ter matematično konstanto ε (opomba[2]). Nato izračunamo $t_{\min,\varepsilon}$ in $t_{\text{maks},\varepsilon}$, ki definirata območje histograma.
2. Določimo število intervalov[3] m za število meritev n.
3. Izračunamo konstantno širino intervala $\Delta t = \frac{t_{\text{maks},\varepsilon} - t_{\min,\varepsilon}}{m}$ in nato določimo še pripadajoče meje intervalov.
4. Razvrstimo vzorec po intervalih in poštejemo pogostosti.
5. Izračunamo relativne frekvence f_i.
6. Izračunamo normirane relativne frekvence f_i^*.
7. Narišemo histogram.

Rešitve po korakih:

Korak 1: $t_{\min} = 28{,}223$ s in t_{maks}=129,850 s in $\varepsilon = 0{,}2$ s.

Korak 2: $n = 200, m = 8$.

Korak 3: $\Delta t = 12{,}70$ s in zgornje meje intervalov v sekundah: 40,93, 53,63, 66,33, 79,04, 91,74, 104,44, 117,15 in 129,85 (srednje vrednosti v sekundah: 34,57, 47,28, 59,98, 72,68, 85,39, 98,09, 110,80 in 123,50).

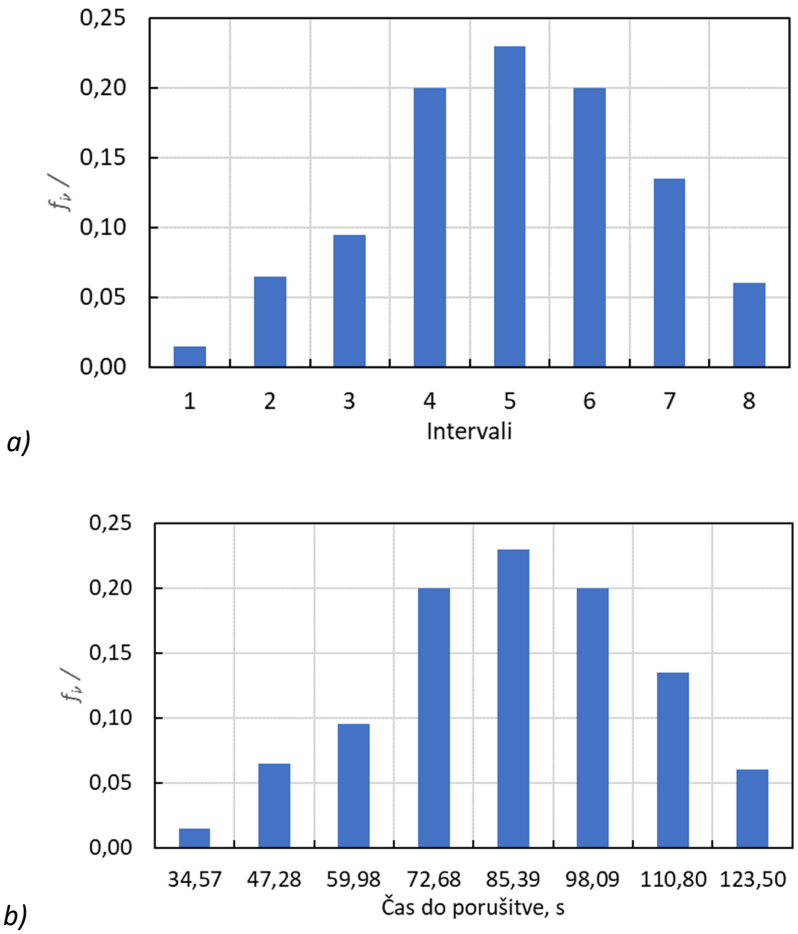
Korak 4: Pogostosti po intervalih: 3, 13, 19, 40, 46, 40, 27 in 12.

Korak 5: Relativne frekvence f_i: 0,015, 0,065, 0,095, 0,2, 0,23, 0,2, 0,135, 0,06 (kontrola vsote!).

Korak 6: Normirane relativne frekvence f_i^*: 0,00118, 0,00511, 0,00747, 0,01574, 0,01810, 0,01574, 0,01062, 0,00472.

[2] Razvrščanje bomo izvedli strojno, zato potrebujemo zunanje vrednosti $t_{\min}$ in t_{maks} numerično zmanjšati in povečati za numerično signifikantni ε ($t_{\min,\varepsilon} = t_{\min} - \varepsilon$, $t_{\text{maks},\varepsilon} = t_{\text{maks}} + \varepsilon$), da ju pri avtomatičnem sortiranju ne izključimo

[3] Ocena števila intervalov: Sturgesovo pravilo $m = \text{INT}(1 + 3{,}33 \cdot \log(n))$ [8]



Slika 4: Histogram a) z intervali in b) srednjo vrednostjo intervala v enotah naključne spremenljivke.

Naj še enkrat poudarimo, da v koraku 5 prikazane vrednosti relativne frekvence predstavljajo verjetnost porušitve v posameznem intervalu, kar sledi iz preštetih pogostosti porušitev po intervalih.

2.2.2 Kumulativna porazdelitvena funkcija

Kumulativna porazdelitvena funkcija $F(t)$ predstavlja verjetnost realizacije naključne spremenljivke do izbranega časa, npr. verjetnost, da bo čas odpovedi (T) komponente v prvem letu (t) od začetka uporabe pri $t_0 = 0$ let in predpostavki, da je pri t_0 izdelek deloval brezhibno.

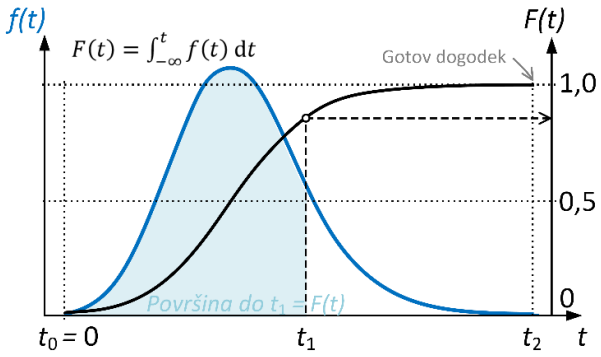
$$F(t) = Pr\{T < t\} \tag{5}$$

Za diskretno podane vrednosti realizacije naključne spremenljivke jo izračunamo kot vsoto relativnih frekvenc $F(t) = \sum_{j \le i} f_i$, medtem ko jo za zvezno podane vrednosti izračunamo z integralom gostote porazdelitve verjetnosti.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt \qquad (6)$$

Izračun naredimo za izbrani časovni interval, npr. med $-\infty$ in t. Če v izračun vključimo vso zalogo vrednosti naključne spremenljivke (zanima nas verjetnost porušitve do časa, ki presega izmerjeni t_{maks}), je porušitve gotov dogodek ($F(t) = 1$).

Kumulativna porazdelitvena funkcija $F(t)$ je prikazana na Sliki 5. Z modro barvo je obarvana površina pod krivuljo gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$ od časa $t_0 = 0$ pa do izbranega časa t_1. Velikost površine ustreza integralu zvezne funkcije $f(t)$ oz. približni vsoti relativnih frekvenc vseh intervalov do časa t_1 v diskretnem histogramu. Glede na definicijo je kumulativna porazdelitvena funkcija $F(t)$ definirana med 0 (ob času $t_0 = 0$ nismo porušili še nobene komponente) in 1 (ob času t_2 smo porušili že vse komponente = verjetnost porušitve po dovolj dolgem času je 100 %).



Slika 5: Graf kumulativne porazdelitvene funkcije.

Računski primer

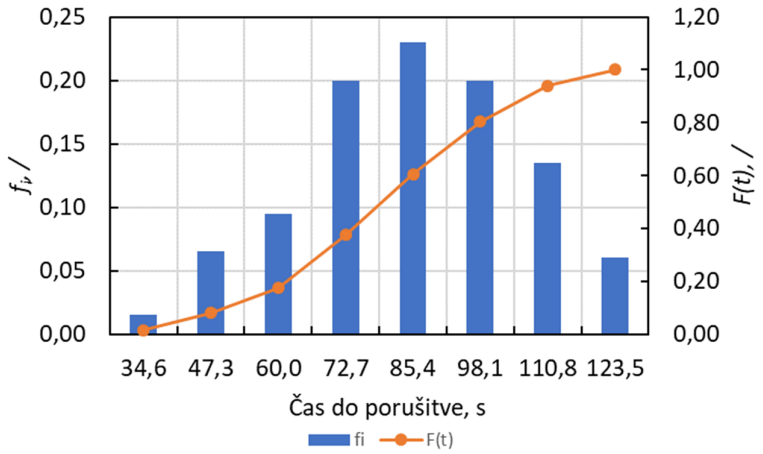
Kumulativno porazdelitveno funkcijo $F(t)$ (Slika 6-desna os) v diskretnem histogramu izračunamo kot naraščajočo vsoto relativnih frekvenc f_i.

$$F_{interval_1} = f_{interval_1} = 0{,}015$$

$$F_{interval_2} = f_{interval_1} + f_{interval_2} = 0{,}015 + 0{,}065 = 0{,}08$$

…

$$F_{interval_8} = f_{interval_1} + f_{interval_2} + \cdots + f_{interval_7} = 0{,}015 + 0{,}065 + \cdots += 1 \qquad (7)$$



Slika 6: Graf kumulativne porazdelitvene funkcije F(t) za izračunani histogram na Sliki 4b.

Računski primer

Nosilec na testu obremenjujemo do odpovedi. Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti časa do odpovedi je naslednja:

$$f(t) = \frac{5}{10^{10}} \cdot t^4 \quad ; za\, 0 \leq t \leq 100\ s \qquad (8)$$

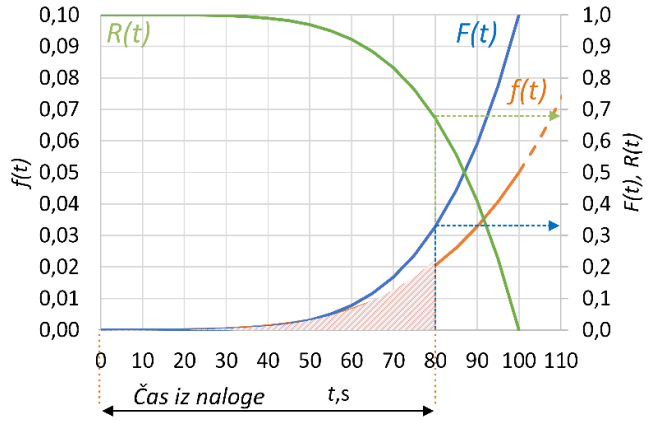
Izračunajte verjetnost porušitve do 80 s?

Ker je vprašanje vezano na čas do odpovedi, iščemo kumulativno funkcijo in njeno vrednost do zahtevanega časa.

$$F(t = 80\ s) = \int_0^{80\ s} \frac{5}{10^{10}} \cdot t^4\ dt = \frac{5}{10^{10}} \cdot \int_0^{80\ s} t^4\ dt = \frac{5}{10^{10}} \cdot \frac{1}{5} \cdot t^5 |_0^{80\ s} = \frac{80^5}{10^{10}} =$$

$$0{,}3277\ oz.\ 32{,}77\ \% \qquad (9)$$

Še grafična potrditev:



Slika 7: Funkcija zanesljivosti $R(t)$, kumulativna funkcija $F(t)$ in funkcija gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$.

Z oranžno črto je prikazana funkcija gostote porazdelitve verjetnosti, pripadajoča kumulativna vrednost do časa 80 s pa z oranžno obarvano površino. Z modro črto je narisan kumulativna funkcija. Za kontrolo smo z zeleno narisali še funkcijo zanesljivosti $R(t) = 1 - F(t)$, ki je razložena v naslednjem poglavju. Pri času 80 s je zanesljivost enaka $R(80\ \text{s}) = 1 - 0{,}3277 = 0{,}6723$.

3 Osnovni modeli zanesljivosti

3.1 Osnovni pojmi

V tem poglavju je predstavljenih nekaj ključnih pojmov in funkcij, ki so pomembni za razumevanje preračuna zanesljivosti izdelka. Najprej so predstavljeni pojmi z njihovimi definicijami in končnimi enačbami, nato so predstavljene še tri glavne funkcije gostote porazdelitve verjetnosti, ki se v praksi najpogosteje uporabljajo pri napovedovanju zanesljivosti. Ob koncu so prikazani računski primer in nekaj računskih nalog za samostojno utrjevanje znanja.

3.1.1 Zanesljivost

Za uporabnika je najpomembnejše, da komponenta deluje. Funkcijo, ki podaja verjetnost delovanja izdelka vzdolž časovne osi t imenujemo zanesljivost $R(t)$. Ta se s povečevanjem časa navadno zmanjšuje, saj dlje, ko uporabljamo izdelek, manj postaja zanesljiv oz. se komplementarno povečuje verjetnost odpovedi $F(t)$ (enačba (5)). Zanesljivost matematično zapišemo kot:

$$R(t) = Pr\{T \geq t\} \;\; ; za \; 0 \leq R(t) \leq 1 \tag{10}$$

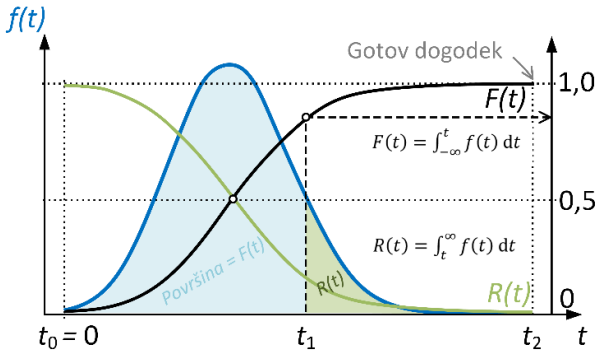
kjer T predstavlja naključno spremenljivko – čas do odpovedi, t pa predstavlja izbrani čas do katerega računamo zanesljivost, z začetkom pri $t = t_0 = 0$. Pri dovolj velikem času delovanja zanesljivost pade na 0 $\left(\lim_{t\to\infty} R(t) = 0\right)$, prav na začetku pa komponenta deluje, zato je zanesljivost največja oz. $R(t_0) = 1$.

$$R(t) = 1 - F(t) \tag{11}$$

$$R(t) + \; F(t) = 1 \tag{12}$$

Na Sliki 8 je z zeleno barvo označena površina, ki predstavlja verjetnost delovanja komponente v časovnem intervalu med $t_0 = 0$ in t_1, medtem ko je z modro označena pripadajoča kumulativna vrednost. Dlje, kot smo od $t_0 = 0$, večja je modra površina (verjetnost porušitve) in manjša je zelena površina (verjetnost delovanja oz. zanesljivost). V limitah, $F(t = t_0) = 0$,

$R(t = t_0) = 1$ in $F(t \to \infty) = 1$, $R(t \to \infty) = 0$, pa sta vrednosti kumulativne funkcije in funkcije zanesljivosti bodisi 1 bodisi 0, glede na dani primer.



Slika 8: Grafična ponazoritev funkcij gostote porazdelitve verjetnosti f(t), zanesljivosti R(t) in kumulativne funkcije F(t).

Zanesljivost lahko tako povežemo tudi s funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \qquad (13)$$

Iz česar sledi, da zanesljivost v splošnem izračunamo kot:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t)\,dt \qquad (14)$$

Poleg funkcije zanesljivosti in kumulativne funkcije pa lastnosti vzorca lahko predstavimo še z drugimi vrednostmi in merili, kot so srednji čas do okvare, medialni in modalni čas do okvare in varianca časov do okvar ter intenzivnost okvar.

3.1.2 Srednji čas do okvare

Srednji čas do okvare (angl. Mean time to failure MTTF) predstavlja pričakovani srednji čas do okvare, ki je enak povprečnemu času. Če porazdelitvena funkcija ni simetrična, nam ta podatek ne pove prav veliko o lastnostih vzorca (Slika 9). V takih primerih je boljše uporabiti medialni ali modalni čas.

$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^{\infty} R(t)\,dt \qquad (15)$$

3.1.3 Medialni čas do okvare

$$R(t_{med}) = 0{,}5 \tag{16}$$

Kar predstavlja verjetnost, ko sta $R(t) = F(t)$ enaka, torej 0,5.

3.1.4 Modalni čas do okvare

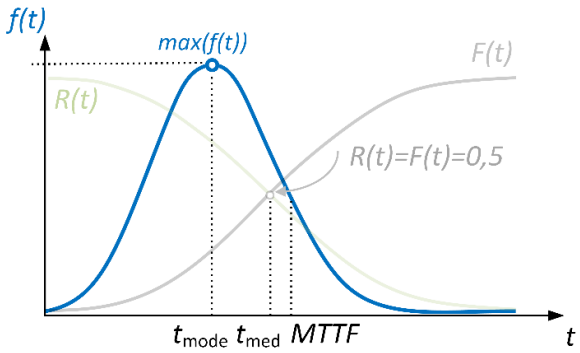
$$f(t_{mode}) = \max_{0 \le t < \infty} f(t) \tag{17}$$

Kar predstavlja pričakovani čas do okvare, ko je funkcija gostote porazdelitve najvišja (največja vrednost) in s tem določa področje, kjer je verjetnost okvare na časovni interval večja kot za kateri koli drug enako velik interval.

3.1.5 Varianca časov okvar

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - MTTF)^2 \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty t^2 \cdot f(t)\, dt - (MTTF)^2 \tag{18}$$

Kar predstavlja povprečno kvadratično odstopanje časov do okvare od povprečnega časa do okvare.



Slika 9: Grafična ponazoritev MTTF, medialnega in modalnega časa do okvare.

3.1.6 Intenzivnost okvar

Intenzivnost okvar (*angl. Hazard rate function, Failure rate function*) po definiciji podaja verjetnost, da bo komponenta odpovedala v naslednjem trenutku, če velja, da do tega trenutka še ni odpovedala. To lahko zapišemo kot:

$$Pr\{t \leq T \leq t + \Delta t\} = R(t) - R(t + \Delta t) \quad (19)$$

In dodamo pogoj, da mora komponenta ob tem trenutku še delovati:

$$Pr\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\} = \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{R(t)} \quad (20)$$

Od tod zapišemo končno rešitev za funkcijo intenzivnosti okvar $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} \quad (21)$$

Funkcijo intenzivnosti okvar ponazarja »diagram banja«. Ta kaže, da je v obdobju utekanja in otroški okvari intenzivnost okvar padajoča funkcija, v srednjem obdobju z naključnimi odpovedmi konstantna in v zadnjem obdobju, kjer prevladujejo odpovedi zaradi utrujanja in obrabe, naraščajoča funkcija.

Zanesljivost v odvisnosti od funkcije intenzivnosti okvar:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\, dt} \quad (22)$$

Ko je funkcija gostote porazdelitve poznana, jo v enačbi (14) uporabimo namesto splošnega $f(t)$. Pripadajoče funkcije zanesljivosti in kumulativne funkcije treh najpomembnejših modelov gostot porazdelitve verjetnosti so predstavljene v naslednjem poglavju.

3.2 Osnovne porazdelitvene funkcije

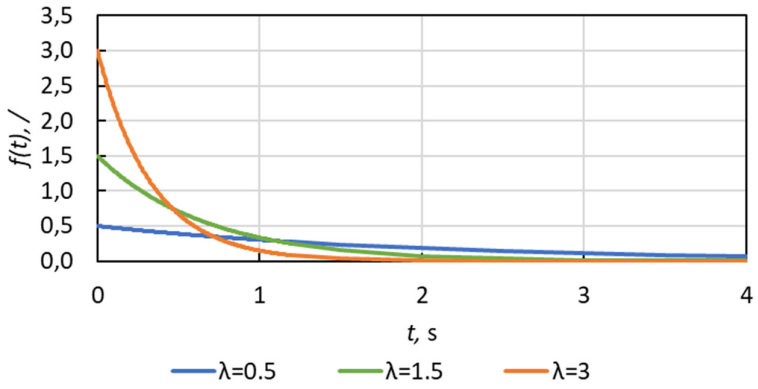
Zvezna predstavitev histograma je funkcija gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$. Histogrami vzorcev se lahko zaradi različnih fizikalnih ozadij razlikujejo po obliki in velikosti. Obstaja več porazdelitvenih funkcij, na tem mestu omenimo najbolj pogosto uporabljene: eksponentna, normalna ali Gaussova, log-normalna in Weibullova porazdelitvena funkcija. Matematično gledano so funkcije lahko eno- ali večparametrične, katerih vrednosti parametrov moramo določiti na osnovi danega vzorca. V tem poglavju bomo pokazali postopke določitve parametrov treh najpogostejših funkcij gostote porazdelitve verjetnosti.

3.2.1 Eksponentna porazdelitvena funkcija

Eksponentno funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti uporabljamo, ko na komponentah opazujemo naključne odpovedi, ki so posledica naključnih dogodkov, kot je npr. udar strele ali drugi izredni dogodki iz okolja, človeška napaka, naključna obremenitev ipd. (srednji del krivulje banje). Intenzivnost okvar je takrat konstantna $\lambda(t) = \lambda = \text{konst}$. Funkcijo zapišemo z naslednjo enačbo:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \;\; ; \; za\, 0 \leq \lambda < \infty \;\; in\, 0 \leq t < \infty \qquad (23)$$

kjer $\lambda(t) = \lambda = \text{konst.}$ predstavlja intenzivnost okvar z enoto število okvar na enoto časa (npr. okvar/h). Graf eksponentne funkcije za različne intenzivnosti okvar je prikazan na Sliki 10.



Slika 10: Graf eksponentne porazdelitvene funkcije.

Parameter λ ocenimo na osnovi pričakovane srednje vrednosti časa do okvare $MTTF = \mu$:

$$\lambda = \frac{1}{MTTF} \qquad (24)$$

kjer povprečno vrednost izračunamo kot:

$$\mu = MTTF = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty R(t) \cdot t = \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t}\, dt = \frac{1}{\lambda} \qquad (25)$$

in standardno deviacijo iz variance, ki je enaka:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty t^2 \cdot f(t)\, dt - (MTTF)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (26)$$

Kumulativno funkcijo eksponentne porazdelitve in funkcijo zanesljivosti pa izračunamo po naslednjih dveh enačbah:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \tag{27}$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\, dt} = e^{-\lambda \cdot t} \quad ; za\, t \geq 0 \tag{28}$$

Posebni primer, ko iščemo zanesljivost do $MTTF$:

$$R(t = MTTF) = e^{-\frac{MTTF}{MTTF}} = e^{-1} = 0{,}367 \tag{29}$$

Ker je intenzivnost okvar konstantna, čas do okvare ni odvisen od predhodnega časa delovanja komponente. To pomeni, da čas utekanja (T_0) oz. utekanje v tem delu ni več smiselno, kar lahko hitro dokažemo:

$$R(t|T_0) = \frac{R(t+T_0)}{R(T_0)} = \frac{e^{-\lambda \cdot (t+T_0)}}{e^{-\lambda \cdot T_0}} = \frac{e^{-\lambda \cdot t} . e^{-\lambda \cdot T_0}}{e^{-\lambda \cdot T_0}} = e^{-\lambda \cdot t} = R(t) \tag{30}$$

3.2.2 Normalna oziroma Gaussova porazdelitvena funkcija

Procese, pri katerih intenzivnost okvar ni konstanta, intenzivnost okvar bodisi pada ali narašča. Slednje je značilno za zadnji del diagrama banje, kar je neposredna posledica starostnih odpovedi zaradi obrabe, korozije in utrujanja materiala. V tem delu gostoto porazdelitve verjetnosti naključno spremenljivko dobro opišemo z normalno oz. Gaussovo funkcijo. Matematično gledano je to dvoparametrična funkcija, kot sledi iz enačbe

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right]} \quad ; za\, -\infty < t < \infty \tag{31}$$

Kumulativno funkcijo normalne porazdelitve pa izračunamo po naslednji enačbi:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right]} dt \tag{32}$$

Integrala v enačbi 29 analitično ni mogoče izračunati, zato se kumulativno porazdelitveno funkcijo izračuna s pomočjo Laplaceove transformacije, s katero uvedemo [9] normirano (standardizirano) normalno porazdelitveno funkcijo $\Phi(z)$ naključne spremenljivke z:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{z^2}{2}\right]} \tag{33}$$

kjer je $z = \frac{(T-\mu)}{\sigma}$ uvedena normalno porazdeljena naključna spremenljivka, s srednjo vrednostjo $\mu = 0$ in standardno deviacijo $\sigma = 1$.

Za reševanje funkcije $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{t} \phi(z)\,\mathrm{d}z$ uporabimo tabele (Priloga 2). Kumulativna funkcija je tako:

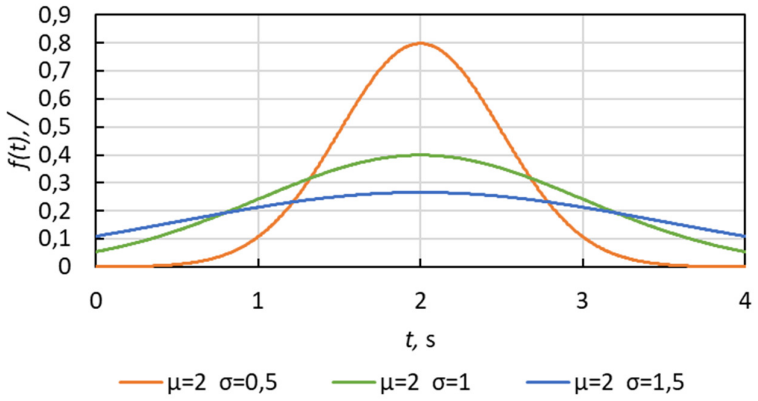
$$F(t) = Pr\{T \le t\} = Pr\left\{\frac{T-\mu}{\sigma} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right\} = Pr\left\{z \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi(z) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \tag{34}$$

kjer srednjo vrednost izračunamo po sledeči enačbi:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{35}$$

standardno deviacijo, pa izračunamo prek variance na naslednji način:

$$\sigma = \sqrt[2]{\sigma^2} = \sqrt[2]{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \tag{36}$$



Slika 11: Graf normalne porazdelitvene funkcije.

Funkcija zanesljivosti:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad (37)$$

In še funkcija zanesljivosti v izpeljani različici:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t)\, dt = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right]}\, dt \quad (38)$$

Intenzivnost okvar izpeljemo na osnovi poznane funkcije gostote porazdelitve verjetnosti in funkcije zanesljivosti:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \quad (39)$$

Funkcija za izračun pričakovanega srednjega časa do odpovedi:

$$MTTF = \mu \quad (40)$$

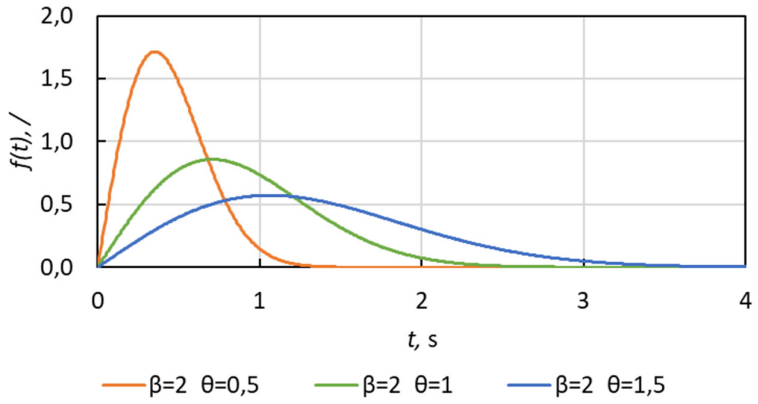
3.2.3 Weibullova porazdelitvena funkcija

Veliko bolj »matematično praktična« kot normalna porazdelitvena funkcija je dvoparametrična Weibullova porazdelitvena funkcija, saj je funkcija zvezno odvedljiva in analitično »integrabilna«. Zato pri izračunu ne potrebujemo tabel. Weibullovo dvoparametrično funkcijo (model časovno odvisne intenzivnosti okvar) lahko uporabimo za modeliranje najrazličnejših oblik porazdelitev, tako za naraščajočo (zadnji del) ali padajočo intenzivnost okvar (prvi del diagrama banje, ki jo povzročajo napake pri proizvodnji, razpoke in slabi vari, slaba kontrola kakovosti, kontaminacija ipd.), treba je le poiskati ustrezno kombinacijo β oblikovnega faktorja in θ velikostnega faktorja. Posledično lahko opišemo padajočo kot tudi naraščajočo intenzivnost okvar. Funkcija gostote porazdelitve verjetnosti je:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]} \quad ;\ za\, \theta > 0\ in\ 0 \le t < \infty \quad (41)$$

Kumulativna funkcija Weibullove porazdelitve izračunamo po naslednji enačbi:

$$F(t) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]} \quad (42)$$



Slika 12: Graf Weibullove porazdelitvene funkcije.

Funkcija zanesljivosti in intenzivnosti okvar:

$$R(t) = e^{\left[-\int_0^\infty \lambda(t)\,dt\right]} = e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right]} \tag{43}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} ; za\ \theta > 0\ in \beta > 0\ ter\ t \geq 0 \tag{44}$$

Funkcija za izračun pričakovanega srednjega časa do odpovedi:

$$MTTF = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{\beta}{\theta} \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right]}\,dt = \theta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tag{45}$$

Ta integral rešujemo z uvedbo gama funkcije Γ in dokončno rešimo s pomočjo tabel (Priloga 3: Funkcija gama).

Pokažimo še katere porazdelitve lahko modeliramo s spreminjanjem β oblikovnega parametra:

- $0 < \beta < 1$: modeliranje padajoče intenzivnosti okvar
- $\beta = 1$: modeliranje konstantne intenzivnosti okvar (eksponentna porazdelitev)
- $1 < \beta < 2$: modeliranje naraščajoče intenzivnosti okvar (konkavna)
- $\beta = 2$: modeliranje Rayleigheve porazdelitve
- $\beta > 2$: modeliranje naraščajoče intenzivnosti okvar (konveksna)
- $3 \leq \beta \leq 4$: modeliranje naraščajoče intenzivnosti okvar (normalna simetrična)

Vrednosti parametrov β in θ lahko določimo na več načinov. Med njimi prevladujeta dve metodi:

a) metoda medialnih rangov (*MMR*),

b) metoda največjega verjetja (*MLE*).

Na tem mestu prikažimo samo prvo, saj temelji na grafičnem določevanju vrednosti parametrov.

Metoda medialnih rangov (*MMR*)

Weibullovo kumulativno funkcijo verjetnosti najprej z logaritmiranjem preoblikujemo. V logaritemskem prostoru na podatke s pomočjo linearne regresije (metoda najmanjših kvadratov) napnemo premico, katere smerni koeficient k in odsek na ordinatni osi b bomo s primerjavo soležnih členov uporabili za izračun parametrov β in θ. Naj opomnim, da je metoda splošna in jo je mogoče uporabiti tudi za iskanje parametrov drugih funkcij (namig: uporabite metodo na funkciji $F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$ in izračunano λ ter jo primerjajte s tisto, ki jo izračunate z $\lambda = \frac{1}{\mu}$)

Kumulativna funkcija:

$$F(t) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]} \tag{46}$$

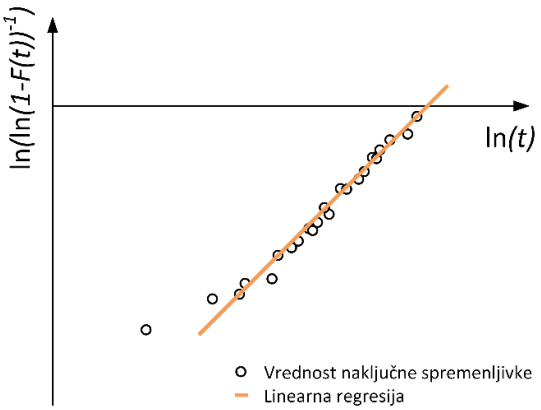
Postopek logaritmiranja:

$$1 - F(t) = -e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right]} \quad /\cdot ln$$

$$\ln\left(1 - \mathrm{F(t)}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathrm{t}}{\theta}\right)^{\beta} \quad /\cdot \ln$$

$$ln\left(ln(1 - F(t))^{-1}\right) = \beta \cdot ln(t) - \beta \cdot ln(\theta) \tag{47}$$

V zadnji vrstici enačbe (47) prepoznamo obliko linearne funkcije z nastavkom $y = kt + b$. Od tod s primerjavo soležnih členov veljajo sledeča relacije: $y = \ln\left(\ln\left(1 - \mathrm{F(t)}\right)^{-1}\right)$, $k = \beta$, $t = \ln(t)$ in $b = -\beta \cdot \ln(\theta)$. Grafični prikaz je predstavljen na Sliki 13. Pri vrednotenju primernosti izračunanih parametrov za popis dejanske gostote porazdelitve verjetnosti si lahko pomagate z opazovanjem vrednosti minimalnega kvadratičnega odstopanja (R^2) aproksimacije (bližje kot je ta vrednosti 1, boljši bo popis $f(t)$ funkcije).



Slika 13: Vzorec s podatki izmerjene naključne spremenljivke in linearna regresija v logaritemski skali.

Sledi izpeljava obeh parametrov funkcije gostote porazdelitve verjetnosti:

Smerni koeficient premice:

$$k \Rightarrow \beta \tag{48}$$

Odsek na ordinatni osi:

$$b \Rightarrow \theta = e^{\left(-\frac{b}{\beta}\right)} \tag{49}$$

Parametra bi številčno lahko izračunali, če bi poznali kumulativno porazdelitveno funkcijo $F(t)$, vendar je ne! Zato je za izračun treba vrednost kumulativne funkcije oceniti. To storimo na osnovi podatkov v vzorcu. Postopek je naslednji: podatke v vzorcu sortiramo v tabelo od najmanjšega do največjega. Vsakemu podatku dodelimo vrednost ranga, ki je enaka položaju v tabeli (i). Nato z Bernardovo formulo (enačba (50)) ocenimo vrednost kumulativne porazdelitvene funkcije (kumulativna verjetnost) vsem vrednostim vzorca (n). Te nato v kombinaciji z meritvijo v vzorcu (t_i) po metodi MMR uporabimo za določitev iskanih parametrov $f(t)$.

$$F_i = \frac{i-0{,}3}{n+0{,}4} \tag{50}$$

Z ocenjeno porazdelitvijo, $F(t)$ v enačbi 47 nadomestimo s F_i iz enačbe 50, za $i = 1, \dots, n$, ki predstavlja zaporedno številko vrednosti naključne spremenljivke v sortiranem vzorcu in n, ki

predstavlja skupno število vrednosti naključne spremenljivke v vzorcu (namig: poglejte si razlike med zaporednimi F_i in razlike med zaporednimi t_i ter razmišljajte o verjetnostih realizacije naključne spremenljivke v posameznem časovnem intervalu).

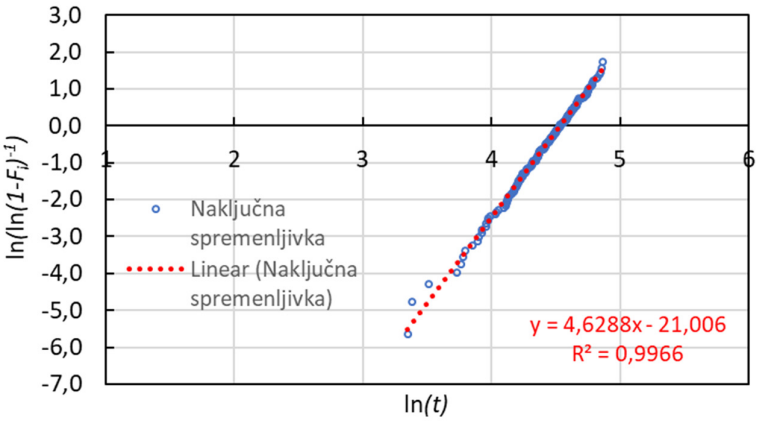
Računski primer

Postopek določitve β in θ bomo opravili kar na podatkih iz Poglavje 2.2.1, za katere že imamo izdelan histogram (Slika 4). Podatke razvrstimo in izračunamo vrednosti po prikazanih enačbah (46–50).

Tabela 1: Primer izračunanih vrednosti za prvih deset sortiranih podatkov in zadnjega.

Zaporedna številka i	Sortirane vrednosti	F_i	$\ln(\ln\left(\frac{1}{1-F_i}\right))$	$\ln(t)$	Weibull *f(t)*
1	28,42	0,004	–5,66	3,35	0,00065
2	29,50	0,009	–4,77	3,38	0,00075
3	33,59	0,014	–4,30	3,51	0,00119
4	41,73	0,019	–3,98	3,73	0,00259
5	43,17	0,024	–3,74	3,77	0,00291
6	43,77	0,028	–3,55	3,78	0,00306
7	44,43	0,033	–3,38	3,79	0,00322
8	47,00	0,038	–3,24	3,85	0,00391
9	49,18	0,043	–3,12	3,90	0,00457
10	49,31	0,048	–3,00	3,90	0,00461
…	…	…	…	…	…
200	129,65	0,997	1,73	4,87	0,00173

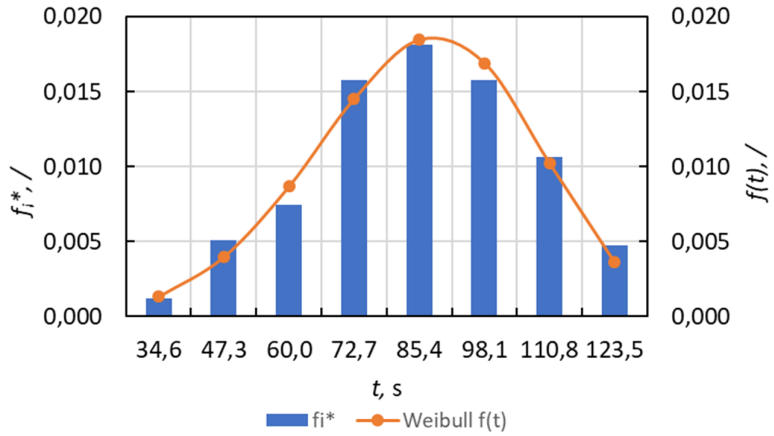
Izračunane vrednosti izrišemo in z linearno regresijo določimo vrednosti iskanih dveh parametrov porazdelitve.



Slika 14: Linearna regresija nad izmerjenimi podatki vzorca.

Iz enačb (48) in (49) sledi, $\beta = k = 4{,}629$ in $\theta = e^{\left(-\frac{-21{,}006}{4{,}629}\right)} = 93{,}51$.

V naslednjem koraku preverimo uspešnost določitve parametrov Weibullove funkcije. To storimo tako, da izračunano, β in θ vstavimo v enačbo (41) ter za pomoč pri izrisu uporabimo kar sortirane vrednosti vzorca oz. histogramske čase t. Za neposredno primerjavo s histogramom najprej relativne frekvence še normiramo (glej enačbo (4)) in izračunamo srednjo vrednost naključne spremenljivke (34,6, 47,3, 60,0, 72,7 …), ki nadomesti zaporedno številko intervala (1, 2, 3 …). Nato dodamo še izračunane vrednosti funkcije gostote porazdelitve verjetnosti $f(t)$.



Slika 15: Normirani histogram in funkcija gostote porazdelitve verjetnosti za ocenjena Weibullova parametra.

Kot kaže Slika 15, se funkcija gostote porazdelitve verjetnosti lepo ujema z normiranim histogramom analiziranega vzorca.

Skupaj izračunajmo še računsko nalogo, ki je vezana na tematiko poglavja.

Računski primer

Porazdelitev gostote verjetnosti [v letih] nosilca je podana z naslednjo enačbo:

$$f(t) = 0{,}2 - 0{,}02 \cdot t \quad ; za\ 0 \leq t \leq 10\ let \tag{51}$$

a) Kolikšen je pričakovani povprečni čas do odpovedi nosilca?

b) Kolikšni je medialni čas do odpovedi nosilca?

Odgovor ad a) Iščemo povprečni čas do okvare ($MTTF$)

$$\mu = MTTF = \int_0^\infty t \cdot f(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{10} t \cdot (0{,}2 - 0{,}02 \cdot t)\ dt = \int_0^{10} 0{,}2 \cdot t\ dt - \int_0^{10} 0{,}02 \cdot t^2\ dt$$

$$= 0{,}2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{10} - 0{,}02 \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^{10} = 0{,}02 \cdot \frac{100}{2} - 0{,}02 \cdot \frac{1000}{3} = 3{,}33\ leta \tag{52}$$

Odgovor ad b) Iščemo medialni čas do okvare (t_{med})

$$R(t_{med}) = 0.5$$

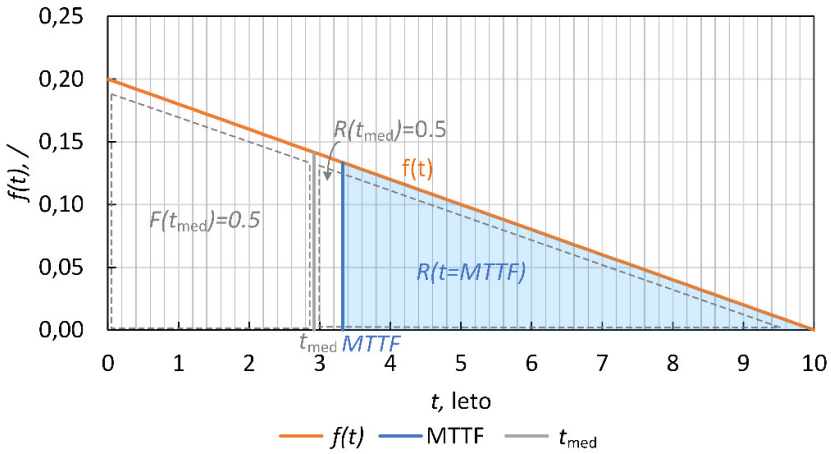
$$R(t_{med}) = \int_{t_{med}}^{10} (0{,}2 - 0{,}02 \cdot t)\ dt = 0{,}5$$

$$0{,}2 \cdot t|_{t_{med}}^{10} - 0{,}02 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t_{med}}^{10} = 0{,}5$$

$$0{,}2 \cdot 10 - 0{,}2 \cdot t_{med} - 0{,}02 \cdot \frac{100}{2} + 0{,}02 \cdot \frac{{t_{med}}^2}{2} = 0{,}5$$

$$0{,}01 \cdot t_{med}^2 - 0{,}2 \cdot t_{med} + 0{,}5 = 0 \tag{53}$$

Dve rešitvi kvadratne enačbe: $i)\ t_{\text{med}} = 2{,}92$ leta in $ii)\ t_{\text{med}} = 17{,}07$ leta. Prava je prva rešitev, saj druga leži izven definicijskega območja.



Slika 16: Računski primer MTTF in t_{med}.

Na kratko preverimo, kolikšna je velika modro obarvana površina na Sliki 16, ki predstavlja zanesljivost $R(t = MTTF)$ delovanja nosilca do $MTTF$.

$$R(t = MTTF) = \int_{3{,}33}^{10} (0{,}2 - 0{,}02 \cdot t)\, dt = \cdots = 0{,}4449 \qquad (54)$$

Kumulativna vrednost ali verjetnost odpovedi nosilca do $MTTF$ pa je enaka:

$$F(t = MTTF) = \int_{0}^{3{,}33} (0{,}2 - 0{,}02 \cdot t)\, dt = \cdots = 0{,}5551 = 1 - R(t = MTTF) \qquad (55)$$

Namig: v tem primeru rezultat lahko preprosto preverite tudi s preprostim izračunom površine trikotnika.

3.2.4 Računske naloge

1. Obravnavaj naslednjo funkcijo zanesljivosti, kjer je t podan v urah:

$$R(t) = \frac{1}{0{,}001 \cdot t + 1}; \quad \text{za } t \geq 0 \text{ let}$$

(a) Izračunajte zanesljivost $R(t)$ po 100 urah obratovanja; po 1000 urah obratovanja.

(b) Izpeljite funkcijo intenzivnosti okvar. Ali je funkcija naraščajoča ali padajoča?

2. Za komponento je poznana intenzivnost okvar, kjer je t podan v letih:

$$\lambda(t) = 0{,}4 \cdot t; \text{ za } t \geq 0 \text{ let}$$

(a) $R(t)$ in določite verjetnost odpovedi komponente znotraj prvega meseca uporabe.

(b) Kakšna je uporabna doba komponente, če je zahtevana zanesljivost 0,95?

3. Porazdelitev okvar je podana z enačbo:

$$f(t) = \frac{3 \cdot t^2}{10^9}; \text{ za } 0 \leq t \leq 1000 \text{ ur}$$

(a) Kakšna je verjetnost okvare v prvih 100 urah, ko velja garancijska doba?

(b) Izračunajte $MTTF$.

(c) Poiščite dobo uporabe, pri kateri je zanesljivost 0,99.

4. Pasivna komponenta distribucijskega sistema zemeljskega plina ima naslednjo funkcijo zanesljivosti:

$$R(t) = 1 - \frac{t^2}{100} \text{ ; za } 0 \leq t \leq 10 \text{ let}$$

Izračunajte/določite:

(a) Zanesljivost za 3-letno uporabo.

(b) Kumulativno funkcijo.

(c) Verjetnost okvare med prvim in tretjim letom uporabe $Pr\{1 < T < 3\}$.

(d) Funkcijo gostote porazdelitve časov do okvare.

(e) Srednji čas do okvare.

(f) Medialni in modalni čas do okvare.

5. Komponenta in konstantno intenzivnost okvar (*CFR*) z $MTTF = 1100$ h. Izračunajte:

(a) Zanesljivost $R(t)$ po 200 h obratovanja.

(b) Kakšna je uporabna doba komponente, če je zahtevana zanesljivost 0,90?

(c) Medialni čas do okvare.

6. Sistem s konstantno intenzivnostjo okvar $\lambda(t) = 0{,}0004\ \text{okvar/h}$ je obratoval 1000 h. Kakšna je verjetnost, da bo sistem odpovedal v naslednjih 100 h in 1000 h?

7. Sistem ima Weibullovo porazdelitev okvar z oblikovnim parametrom $\beta = 1{,}4$ in

velikostnim parametrom $\theta = 550$ dni. Določite:

(a) $R(100\ \text{dni})$?

(b) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0,99?

(c) $MTTF$?

(d) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0,90?

8. Dizelski agregat ima čas do okvare (v urah) definiran z naslednjo funkcijo intenzivnosti okvar:

$$\lambda(t) = 0{,}003 \cdot \left(\frac{t}{500}\right)^{0{,}5} \quad ; \text{za } t \geq 0$$

(a) Kakšna je zanesljivost agregata, če mora nepretrgoma obratovati 50 h?

(b) Kakšna je uporabna doba sistema, če je zahtevana zanesljivost 0,90?

(c) Izračunaj $MTTF$?

(d) Predpostavimo, da je agregat obratoval 50 h. Kolikšna je verjetnost, da bo preživel naslednjih 50 h obratovanja?

9. Obraba strojnega elementa ima normalno porazdelitev verjetnosti. 90 % vseh poškodb

se zgodi med 200 h in 270 h uporabe strojnega elementa. (Opomba: 5 % vseh poškodb se zgodi pred 200 h in 5 % vseh poškodb se zgodi po 270 h.)

(a) Določite $MTTF$ in standardno deviacijo časov do okvare.

(b) Kakšna je zanesljivost strojnega elementa, če je ta v uporabi 210 h in potem zamenjan?

(c) Določi uporabno dobo strojnega elementa, če toleriramo 1 % verjetnost okvare, preden ga zamenjamo.

(d) Če je strojni element bil v uporabi 200 h, kakšna je zanesljivost za naslednjih 10 h?

10. Podjetje se mora odločiti med dvema AC-motorjema za uporabo v novem aparatu za gospodinjstvo. Motor A ima konstantno intenzivnost okvar $\lambda(t) = 0{,}000011\,\text{okvar/h}$ delovanja. Motor B ima intenzivnost okvar podano s funkcijo $\lambda(t) = 2 \cdot 10^{-10} \cdot t\,\text{okvar/h}$.

(a) Določite porazdelitveno funkcijo (funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti) za motor B, ki ustreza dani $\lambda(t)$.

(b) Primerjajte $MTTF$ obeh motorjev. Na podlagi primerjave določite ustreznejšo izbiro.

(c) Podjetje ima enoletno garancijo na vse svoje aparate. Kateri motor bi bil ustreznejši v smislu zmanjševanja garancijskih stroškov, če motor deluje $2/3$ časa? Predpostavi enake stroške zamenjave za oba motorja.

(d) Kateri motor bi kupec izbral za svoj aparat, da bi zmanjšal stroške zamenjave motorja, če pričakuje, da bo aparat uporabljal 10 let. Opomba: naprava ima eno leto garancije.

<u>Rešitve:</u>

1. $R(100) = 0{,}91;\ R(1000) = 0{,}5;\ \lambda(\text{t}) = \frac{0{,}001}{0{,}001 \cdot \text{t}+1}$; padajoča funkcija $\text{t} \to \infty;\ \lambda(\text{t}) \to 0$
2. $R(t) = \text{e}^{-0{,}2 \cdot \text{t}^2}$; $F(1/12) = 0{,}00139$; $t = 0{,}506$ leta
3. $R(t) = 1 - \frac{3\text{t}^2}{10^9}$; $F(100) = 0{,}001$; $MTTF = 750\ \text{h}$; $t = 215{,}4\ \text{h}$

4. $R(3) = 0{,}91$; $F(t) = \frac{t^2}{100}$; $Pr\{1 < T < 3\} = 0{,}08$; $f(t) = t/50$; $MTTF = 6{,}66$ leta ; $t_{\text{med}} = 7{,}07$ leta; $t_{\text{mode}} = 10$ let (opomba: grafično iz diagrama *f(t)*)
5. $R(200) = 0{,}83491$; $t = 115{,}9$ h; $t_{\text{med}} = 762{,}46$ h
6. $F(100) = 0{,}04$; $F(1000) = 0{,}33$
7. $R(100) = 0{,}912$; $t_{0{,}99} = 20{,}575$ dneva; $MTTF = 500{,}81$ dneva, $t_{0{,}90} = 110{,}22$ dneva
8. $\theta = 500$ h; $\beta = 1{,}5$; $R(50) = 0{,}968$; $t_{0{,}90} = 111{,}54$ h; $MTTF = 451{,}65$ h; $R(50/50) = 0{,}9438$
9. $MTTF = 235$ h; $\sigma = 21{,}2$ h; $R(210) = 0{,}881$; $t_{0{,}99} = 185{,}82$ h; $R(10|200) = 0{,}927$
10. Intenzivnost okvar sledi Weibullovi porazdelitveni funkciji $\beta = 2$; $\theta = 10^5$ h; $MTTF_{\text{A}} = 10{,}38$ leta ; $MTTF_{\text{B}} = 10{,}12$ leta ; $R_{\text{A}}(5840\text{ h}) = 0{,}9377$; $R_{\text{B}}(5840\text{ h}) = 0{,}9966$; $R_{\text{A}}(9|1) = 0{,}4201$; $R_B(9|1) = 0{,}4678$

4 Konstrukcijska naloga

4.1 Definicija projektne naloge

Praktične aplikacije teoretičnih izhodišč pri predmetu Konstruiranje naprednih sistemov je najbolje predstaviti na konkretnem primeru. Po možnosti naj bo ta dovolj kompleksen, da vključuje vsebine vseh predavanj. Tak sistem je na primer osebni avtomobil. Ker je za reševanje nalog, vezanih na tako kompleksen sistem, potrebno veliko podatkov, ki so po navadi nepoznani ali nedostopni, je boljše uporabiti tehnološko gledano lažji sistem ali pa si omisliti povsem svoj sistem.

Na tej točki zato predstavimo svoj primer realne naloge, ki bo služil kot študijski model za prikaz delovanja in uporabe teoretičnih razvojno-konstrukcijskih konceptov. Primer naloge bi se lahko glasil:

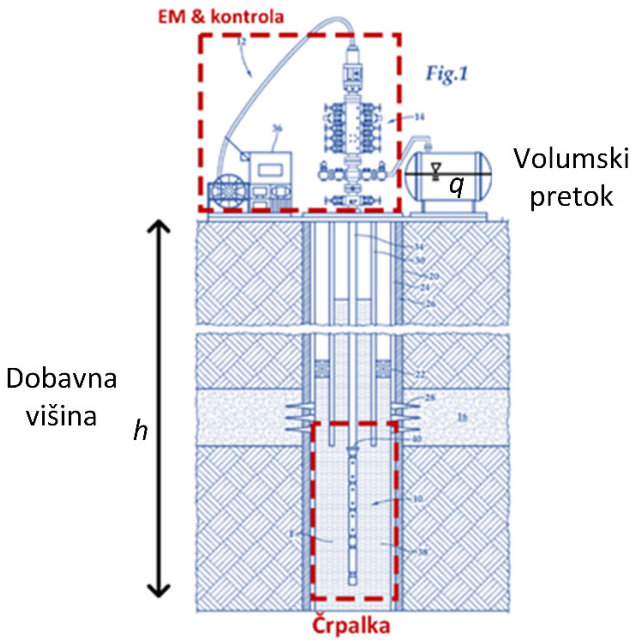
Zaradi pogostih izrednih vremenskih dogodkov se nivo podtalnice hitro spreminja ali celo umika v vedno globlje sloje zemljine. To se kaže v vedno večjih težavah pri zagotavljanju pitne vode, kar je velik problem. Zato se je pojavila potreba po razvoju zanesljivih, zmogljivih in cenovno ugodnih črpalnih sistemov za prečrpavanje vode iz večjih globin.

Pri konstruiranju s pomočjo teoretično pridobljena znanja na predavanjih upoštevajte sledeče zahteve trga.

Tabela 2: Zahteve trga za določitev zmogljivosti črpalnega sistema.

Dobavna višina	*h*	100 m
Pretok	*q*	max. 10 L/min
Okvirna doba trajanja	*t*	2 leti
Okvirni cenovni razred	cena	do 500 €
Največji zunanji premer	*D*	150 mm

Razviti sistem je lahko nepremično vgrajen na objektu ali premičen, npr. na prikolici. Sistem mora omogočati črpanje vode, pomešane z različnimi trdimi delci (mulj, pesek ipd.). Črpalka naj ima svoj sistem pogona in krmiljenja. Primer za pomoč pri konstruiranje je prikazan na Sliki 17.



Slika 17: Sistem za črpanje pitne vode iz definicije projektne naloge [5–7].

Na osnovi zahtev trga si po spodnjih navodilih zamislite, skonstruirajte in ovrednotite sistem za črpanje pitne vode. Naloge sledijo vrstnemu redu predavanj in vaj v časovnem razponu petnajstih tednov. Navodila za izdelavo posameznega poglavja bodo predstavljena v nadaljevanju predloge, vendar vas spodbujamo, da že sami vnaprej razmišljate o potrebnih konstrukcijskih korakih.

Konstrukcijska naloga-uvod

a) Za rešitev naloge si zamislite svoj koncept črpalke vključno s pripadajočim pogonom in krmiljem (slednje poenostavljeno). Pri razmisleku uporabite lastne izkušnje in ideje, lahko pa si pomagate tudi z že znanimi rešitvami (internet, katalogi, izkušnje …).

b) Izvedite analizo izvedljivosti (primerjajte dane zahteve in dejanske zmogljivosti izbrane rešitve). Na podlagi danih omejitev izdelajte seznam sistemskih zahtev, ki vam bodo v pomoč pri nadaljnjih konstrukcijskih korakih (npr. določevanju pretoka moči, medija ipd.).

Osnovna struktura izdelka

a) Izdelajte poenostavljeni 3D model/konstrukcijsko risbo/konceptualno risbo črpalke – osnova za določitev funkcijske strukture (vidni vsi sestavni deli).

b) Na osnovi risbe črpalke določite pretok oz. smer obremenitve preko elementov črpalke (analitično/numerično/…). S tem boste pridobili informacijo o delitvi obremenitve, ključnih elementih za delovanje črpalke, možnostih za poenostavitve ali priložnostih za izboljšanje zanesljivosti.

Modularnost tehniškega sistema

a) Ugotovite modularnost sistema, razmislite o delih za redundanco s stališča zanesljivosti delovanja in pričakovane dobe trajanja.

b) Na poenostavljen način utemeljite alokacija zanesljivosti.

Razvoj in izdelava

a) Določite in utemeljite, katere dele bi razvijali in katere kupili. Utemeljite, ali bi lahko katerega izmed delov dali razviti in izdelati podizvajalcu?

b) Izdelajte kosovnico izdelka in dele umestite v »*supply chain*«.

Validacija izdelka

a) Izvedite *FMEA*-analizo (lahko se opredelite tudi samo na manjši podsklop).

b) Izvedite *FTA*-analizo (lahko se opredelite tudi samo na manjši podsklop).

Vzdrževanje

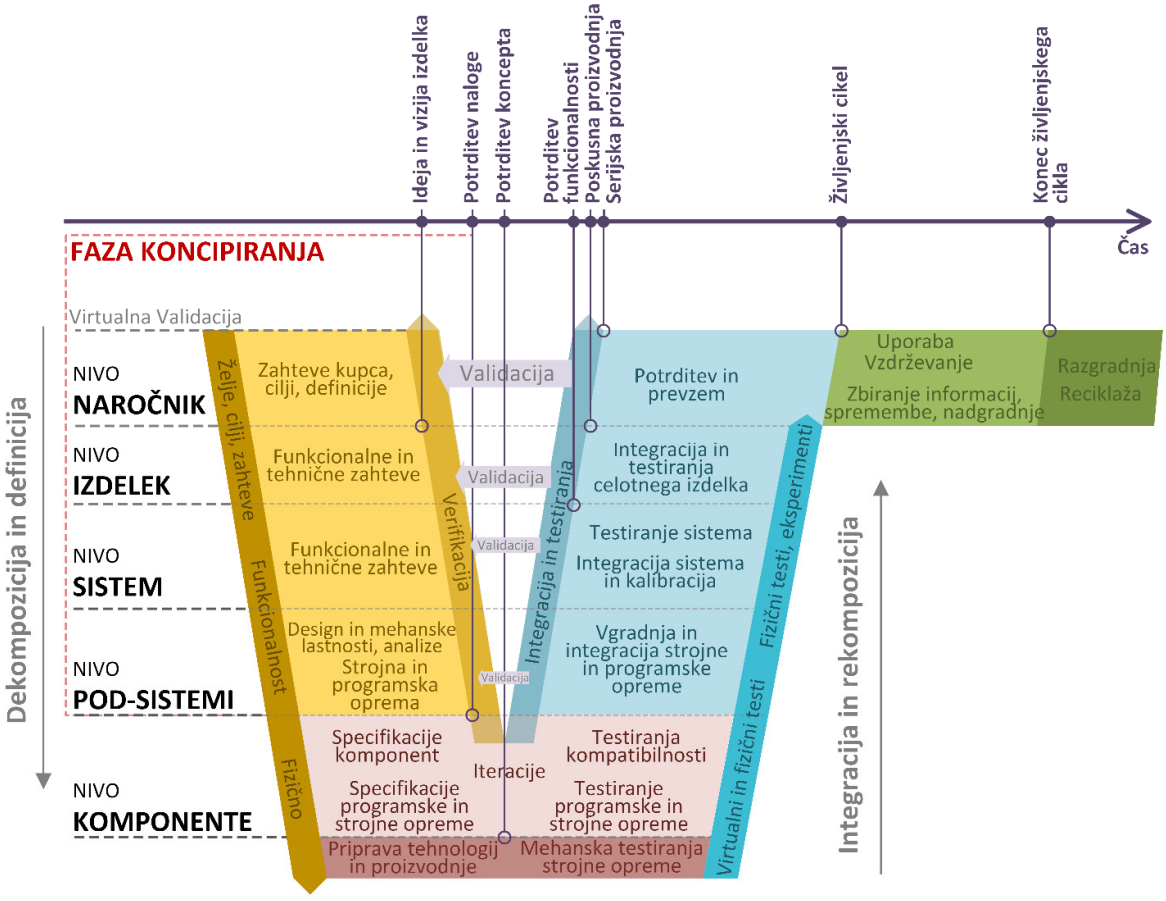
a) Pripravite načrt vzdrževanja.

b) Predvidite vrsto vzdrževanja.

c) Ocenite časovno strukturo vzdrževanja (poenostavljeno; nivo delov, podsestavov, izdelka).

4.2 Razvojni V-model

Za vodenje prek nalog bomo sledili v industriji uveljavljenemu V-modelu, ki grafično prikazuje in povzema življenjski cikel razvoja sistema. Model opisuje dejavnosti, ki jih je treba izvesti, in rezultate, ki jih je treba doseči med razvojem komponente, izdelka, sistema … Za razliko od tradicionalnih linearnih modelov (zaporedna linearna časovnica) v tem modelu zaporedje omogoča »vračanje« v določena predhodna stanja. V praksi se zato uporablja predvsem pri izdelavi zahtevnih modelov življenjskega cikla razvoja (npr. najbolj tipična je aplikacija na razvoju kompleksnih računalniških programov) kot tudi modelov vodenja projektov (povezava med različnimi razvojnimi in proizvodnimi deležniki v isti časovni skali). Dejavnosti z leve proti desni napredujejo iz abstraktnega proti konkretnemu.



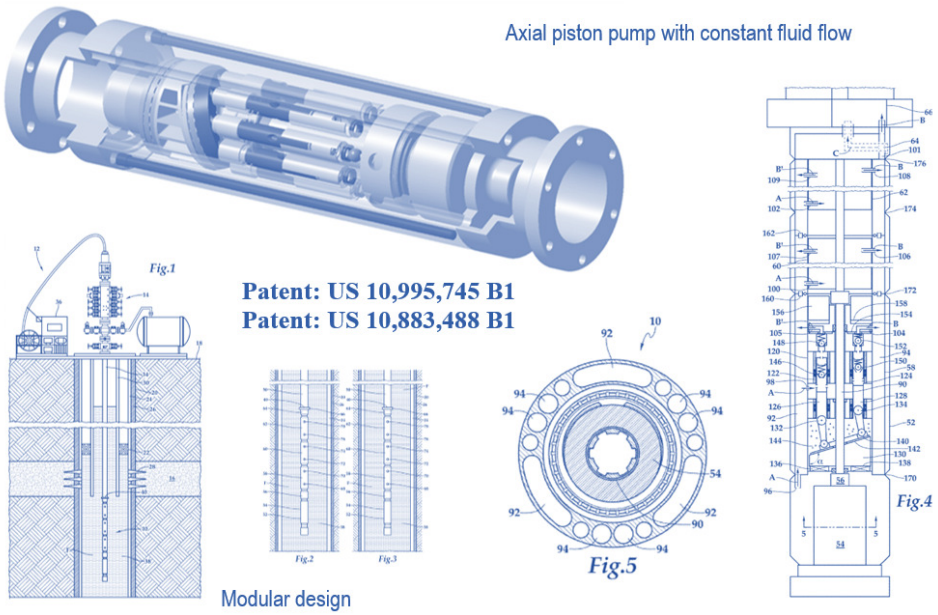
Slika 18: Poenostavljeni V-model razvoja kompleksnega izdelka. Povzeto po [10].

Primer poenostavljenega V-modela je prikazan na Sliki 18. Seveda se življenjski cikel izdelka ne konča z validacijo in testi, vendar z uporabo in odstranitvijo. Zato V-modelu pogosto dodamo še podaljšek v desno stran, ki vključuje aktivnosti v dobi izrabe, kot so zbiranje informacij za izboljšanje izdelka in nadgradnje ter tudi postopke razgradnje in reciklaže (temelj krožnega gospodarstva)!

5 Osnovna struktura izdelka

5.1 Funkcionalne zahteve

Predpostavimo, da je bil koncept črpalne naprave izdelan in znan. Konceptualno rešitev smo s pomočjo metodike konstruiranja pripeljali do konstrukcijske risbe in poenostavljenega 3D-modela. Ta je osnova za določitev funkcijske strukture in nadaljnjega vrednotenja. Če je ideja nova, velja razmisliti tudi o patentni zaščiti. Tak je tudi primer razvite aksialne batne črpalke, na katerem bomo osnovali reševanje nalog v tej predlogi. Črpalka je v prerezu in shematsko prikazana na Sliki 19. Patenta sta dva in vključujeta (1) zaščito ideje kombiniranega koncepta črpanja z nizkotlačnim (pogonskim) in visokotlačnim (črpalnim) delom ter (2) razviti mehanski sistem za učinkovito zaporedno sestavljanje črpalk v črpalni sistem (skupni mehanski pogon) s povečano zmogljivostjo črpanja in hkratnem vzporednem sistemu hidravličnega razvodja (skupni sesalni in tlačni vodi), ki omogoča neodvisno vklapljanje in izklapljanje črpalk v sistem ter s tem veliko prilagodljivost proizvodnje fluida/črpalnih parametrov.

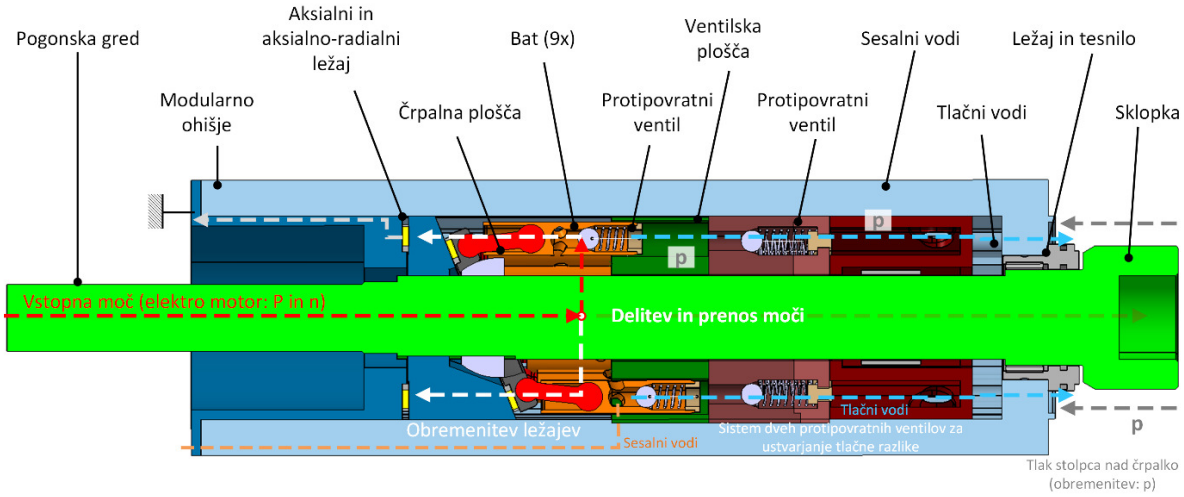


Slika 19: Patentirani črpalni sistem za črpanje tekočin nizke gostote (997 kgm^{-3}) pri visokih tlakih (30 MPa) in temperaturi (150 °C). Vir Slike [6,7].

Črpalni sistem na Sliki 18 izpolnjuje ali presega vse dane zahteve v Tabeli 2.

5.2 Določitev obremenitev v sistemu

Ker je patentna slika dovolj podrobna in vključuje precej tehničnih detajlov, jo bomo uporabili, da bi določili obremenitve na posamezni komponenti in prenos obremenitve po sistemu. V tem koraku je glede na razpoložljive podatke določitev obremenitev lahko samo okvirna, ob poznavanju vseh konstrukcijskih parametrov pa je obremenitve mogoče zelo dobro tudi izračunati (analitično ali s pomočjo numerične analize). Primer poenostavljene delitve moči in obremenitve po komponentah je prikazana na Sliki 20.



Slika 20: Poenostavljeni prikaz delitve moči in obremenitev posamezne komponente črpalke.

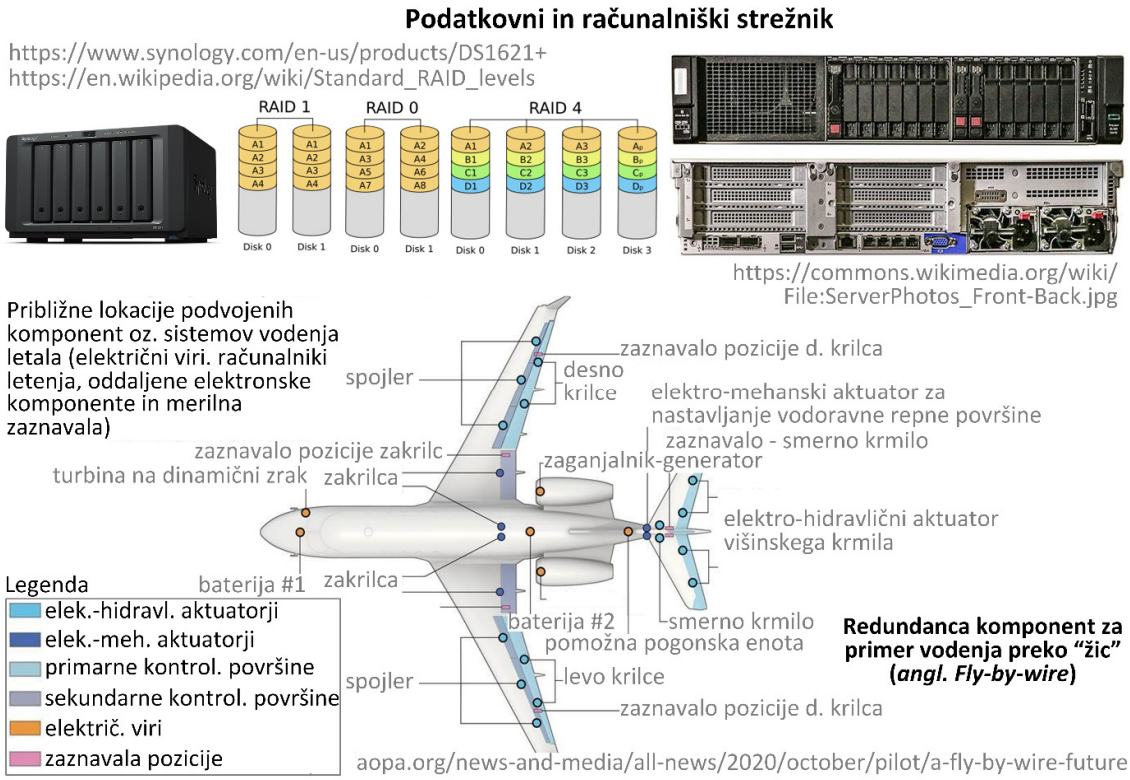
Na Sliki 20 je črpalka prikazana v prerezu, zato vseh komponent ni mogoče videti sočasno. Za lažje razumevanje delovanja prikazanega prototipa aksialne batne črpalke na hitro opišimo njene ključne posebnosti.

Zahtevana tlačna razlika se ustvarja s premikanjem batov (skupaj 9 batov) vzdolž osi črpalke in pari protipovratnih ventilov. Premikanje batov omogoča pogonski del črpalke, ki ga sestavlja nagibna plošča z gredjo, segment za vodenje batov in devet batov. Bati se zaradi specifične kinematike, ki izhaja iz rotacije črpalne plošče, premikajo v smeri hoda in nazaj sorazmerno s frekvenco vrtenja gredi. Nagib črpalne plošče neposredno določa dolžino hoda batov (količino istisnine), kjer je zaradi narave gibanja v posameznem trenutku samo en bat »najbolj potisnjen« v smeri protipovratnih ventilov (črpanje fluida) in hkrati en bat, ki je »najbolj izvlečen« v smeri nagibne plošče (sesanje fluida). Ostali bati so takrat nekje v vmesnem položaju. Ker je v črpalki

uporabljenih devet batov, jih na ta način vedno štiri sesa in pet črpa oz. štiri črpa in pet sesa, kar je odvisno od trenutnega položaja plošče z bati glede na izvrtine s protipovratnimi ventili (pretok fluida). Iz tega sledi, da obremenitev na ležaje in gred ni popolnoma enakomerna in zvezna, kar predvsem pri višjih vrtljajih občutimo kot manjše vibriranje in pulzirajoče prečrpavanje fluida. Kot kaže Slika 19, so na obodu segmentov enakomerno razporejene izvrtine za sesanje fluida in tlačni vodi za proizvodnjo-črpanje fluida proti površju. Primer: za delovanje ene črpalke pri $20\ \mathrm{MPa}$ $(200\ \mathrm{bar})$ tlačne razlike in $1200\ \mathrm{vrt/min}$ vrtilni frekvenci je treba zagotoviti motor z močjo vsaj $11\ \mathrm{kW}$.

6 Modularnost

Na osnovi Slike 20 in ugotovljenega poteka moči je mogoče sklepati o zaporedni ali vzporedni vezavi komponent, iz katerega izhaja morebitna modularnost sistema. To je med drugim pomembno za določevanje »šibkih točk« konstrukcije, morebitnih ozkih grl pri pretoku snovi, moči ali informacije in nenazadnje tudi planiranja proizvodnje, stroškov in možnosti vzdrževanja. Modularnost pa je ključna tudi pri najbolj kritičnih sistemih, kjer zahtevamo visoko stopnjo zanesljivosti z malo možnostmi za nedelovanje. Taki sistemi so na primer sistemi, katerih nedelovanje bi pomenilo resno ogrožanje človeških življenj (medicinski aparati za ohranjanje življenjskih funkcij, krmilni sistemi na letalih), pomembni računalniški strežniki (bančna, energetska in vojaška industrija) in varnostni sistemi (požarni, protipoplavni in obveščevalni sistemi). Kadar v sistemu podvajamo komponente z namenom izboljšanja zanesljivosti delovanja, govorimo o redundanci[4].



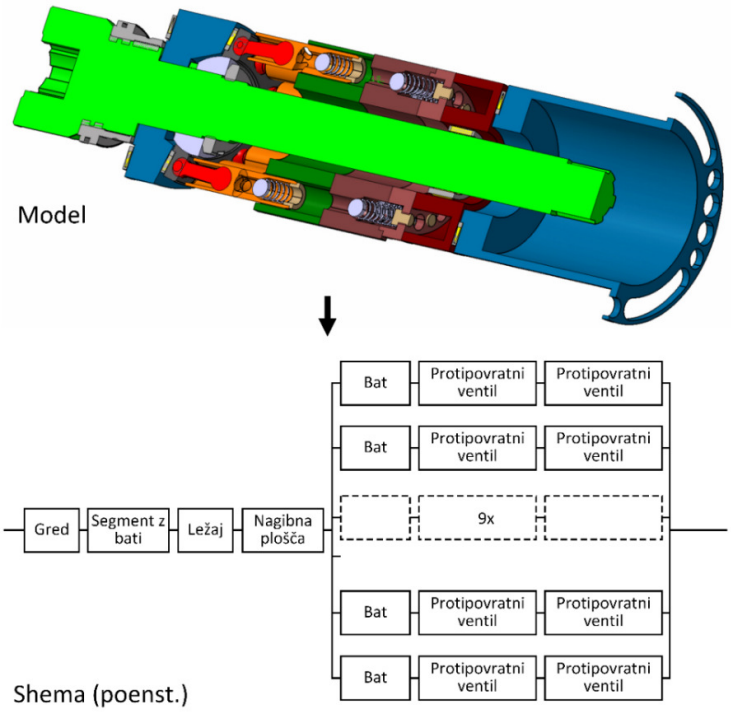
Slika 21: Sistemi z zahtevano visoko stopnjo redundance. Vir Slike [11–13].

[4] redundánca -e ž (â) jezikosl., mat. lastnost znaka, sistema znakov, da prenaša določeno obvestilo z več znaki, prvinami, kot je nujno potrebno: redundanca povečuje verjetnost pravilnega razumevanja informacije [27].

Šele ko je popolnoma jasna struktura izdelka oz. sistema, je mogoče planirati modularnost, saj velikokrat preprosto dodajanje komponent z namenom povečevanja zanesljivosti ni mogoče, nezadovoljivo povečuje zanesljivosti ali pa je stroškovno neutemeljeno.

Pri določitvi strukture izdelka si lahko pomagamo tudi tako, da najprej ugotovimo, katere veličine so ključne za funkcionalnost izdelka, npr. zagotavljanje dovolj velike tlačne razlike in volumskega pretoka. Zaporedje komponent lahko določimo tudi tako, da razmislimo, kako bi nedelovanje posamezne komponente vplivalo na ključno funkcionalnost, npr. če se pokvari samo en protipovratni ventil, črpalka še vedno lahko ustvari želeno spremembo tlaka, vendar se bo sorazmerno zmanjšal pretok za eno devetino, kolikor prispeva en bat ipd.

Na prikazanem primeru (glej Sliki 19 in 20) razvite črpalke tako lahko hitro ugotovimo, da porabljamo mehansko delo za premik tekočine in ob tem premagujemo tudi tlačno razliko, ki jo ustvarja tlačni stolpec nad črpalko (potencialna energija). Moč do točke delitve na gredi teče prek komponent popolnoma zaporedno-v seriji, medtem ko se v sami točki delitve moč pretoči na devet delov (poenostavljeno sklepanje glede na število batov). Od tu naprej tekočina skupaj vstopa v produkcijsko cev in naprej proti površju.

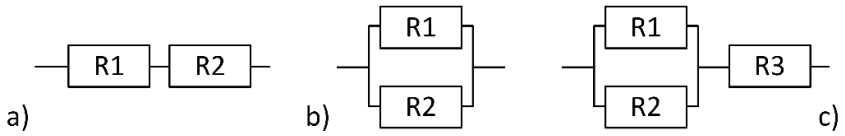


Slika 22: Poenostavljena shema komponent v črpalki, prek katerih teče tok moči.

Vsebino tega poglavja bi lahko umestili v sredino levega dela V-modela (Slika 18).

6.1 Teoretična izhodišča osnovnih vezav komponent v sistem

Osnovni vezavi komponent sestavljenih sistemov sta zaporedna in vzporedna vezava. Te lahko po potrebi kombiniramo v osnovne sestavljene vezave. Vezave navadno prikazujemo s shemami na nivoju komponent. Sheme osnovnih vezav so prikazane na Sliki 23. Ker bomo v nadaljevanju predloge sheme vezav uporabili kot izhodišče za izračun zanesljivosti sistema $R_s(t)$, komponente označujemo s kombinacijo črke »*R*« (*angl. Reliability*) in zaporedne številke, ki ločuje med različnimi (vrstami) komponentami $Ri = R_i(t)$.



Slika 23: Osnovne vezave komponent a) zaporedna vezava, b) vzporedna vezava in c) osnovna sestavljena vezava.

Na Sliki 23a je prikazana preprosta zaporedna (*angl. serial*) vezava, na Sliki 23b je prikazana preprosta vzporedna (*angl. parallel*) vezava in na Sliki 23c je prikazana preprosta sestavljena oz. kombinirana vezava. Za prvo vezavo je značilno, da odpoved katere koli od komponent vodi do odpovedi celotnega sistema, zato je s stališča zanesljivosti tak sistem zelo slab. V drugem primeru morajo za nedelovanje sistema odpovedati vse komponente, kar je s stališča zanesljivosti delovanja dobro. V tretjem primeru pa so komponente vezane v sistem, ki ga moramo najprej poenostaviti, kar storimo tako, da v shemi prepoznamo eno ali obe osnovni vezavi. V danem primeru na Sliki 23c prepoznamo vzporedno vezani komponenti R1 in R2, ki jima je zaporedno dodana še komponenta R3.

Zanesljivost zaporedno vezanih komponent

Zanesljivost zaporedno vezanih komponent dobimo kot presek verjetnosti delovanja vseh vezanih komponent. Tako izračunamo zanesljivost sistema $R_S(t)$ v času t po enačbi:

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad (56)$$

kjer $R_i(t)$ predstavlja funkcijsko vrednost zanesljivosti v času t za vsako od zaporedno vezanih komponent.

Zanesljivost vzporedno vezanih komponent

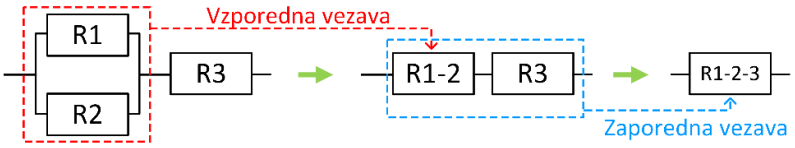
Sistem vzporedno vezanih komponent ne bo deloval, če odpovedo vse komponente ($F(t) = 1 - R(t)$. Na ta način pridemo do izraza za izračun zanesljivosti sistema $R_s(t)$ v času t po enačbi:

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) \qquad (57)$$

kjer $R_i(t)$ predstavlja funkcijsko vrednost zanesljivosti v času t za vsako od zaporedno vezanih komponent.

Zanesljivost osnovne sestavljene vezave komponent

Zanesljivost osnovne sestavljene vezave komponent $R_s(t)$ v času t izračunamo po korakih. V danem primeru je to mogoče storiti v dveh korakih, kot prikazuje Slika 24.



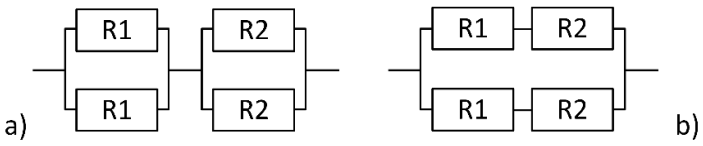
Slika 24: Koraki reševanja osnovne sestavljene vezave.

$$R_s(t) = R_{1-2}(t) \cdot R_3(t) = [1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t))] \cdot R_3(t) \qquad (58)$$

kjer $R_1(t)$, $R_2(t)$ in $R_3(t)$ predstavljajo zanesljivosti komponent $R1$, $R2$ in $R3$.

6.2 Redundanca na visokem in nizkem nivoju

Zanesljivost sistema lahko povečamo z redundantnimi sistemi, ki jih dobimo s podvajanjem vzporedno vezanih komponent, podsistemov ali celo sistema. Podvajanja je na nizkem nivoju, ko dodajamo posamezne komponente ali na visokem nivoju, ko podvajamo podsisteme oz. celoten sistem (glej Sliko 25).



Slika 25: Povečevanje zanesljivosti delovanja sistema a) redundanca na nizkem in b) visokem nivoju.

Hitra primerjava zanesljivosti obeh sistemov pokaže, da ima sistem z redundanco na nizkem nivoju večjo zanesljivost kot sistem z redundanco na visokem nivoju!

6.3 Poseben primer: *k* od *n* vezava

k od n vezava je specialni primer sistema vzporedno vezanih komponent. V takem sistemu mora za izvajanje funkcije vedno delovati vsaj k od skupnega števila n komponent ($k \leq n$)[5]. Te morajo biti enake in delovati medsebojno (statistično) neodvisno. Komponente imajo lahko samo dve mogoči stanji: deluje ali ne deluje. Praktični primer bi lahko bilo generatorsko postrojenje, ki proizvaja električni tok za kritično infrastrukturo, na primer za poganjanje podatkovnih strežnikov ali v bolnišnici.

Zanesljivost delovanja sistema komponent $R_s(t)$ lahko izračunamo prek binomsko porazdeljene naključne spremenljivke.

$$p(x) = \binom{n}{x} R^x \cdot (1-R)^{n-x} \qquad (59)$$

kjer binomski člen in zanesljivost po času t rešimo po naslednjih dveh enačbah:

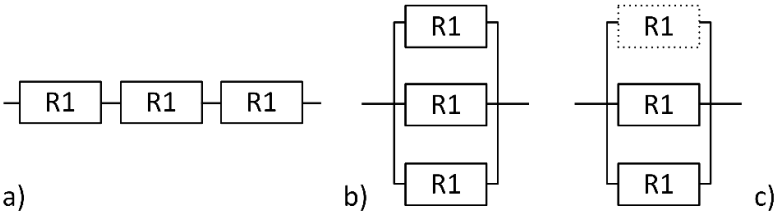
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} \; ; za\, n \geq k \geq 0 \; in \; (n,k) \in \mathbb{N} \qquad (60)$$

$$R_s(t) = \sum_{x=k}^{n} p(x) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} R^x \cdot (1-R)^{n-x} \qquad (61)$$

Računski primer

Električni sistem sestavljajo tri enake komponente. Komponente imajo enake lastnosti in zanesljivost delovanja. Komponente so medsebojno neodvisne. Po prvem letu delovanja je verjetnost odpoved komponente 0,666. Poiščimo zanesljivost sistema a) zaporedno vezanih, b) vzporedno vezanih zanesljivosti komponent po prvem letu delovanja. Poiščimo še zanesljivost sistema c) po prvem letu, če morata vedno delovati vsaj 2 komponenti oz. d) če mora vedno delovati vsaj 1 komponenta?

[5] Opomba: ko je $k = n$ dobimo sistem zaporedno vezanih komponent.



Slika 26: računski primer a) zaporedna, b) vzporedna in c) k od n vezava komponent.

Odgovor ad a)

Zanesljivost zaporedno vezanih komponent izračunamo po enačbi (56). Ker sprašujemo po zanesljivosti, poznana pa je verjetnost odpovedi, najprej poiščimo zanesljivost po komponenti po prvem letu: $R_1(1\text{ leto}) = 1 - \mathrm{F}_1(1\text{ leto}) = 1 - 0{,}666 = 0{,}333.$

$$R_s(1\ leto) = \prod_{i=1}^{n} R_i(1\ leto) = R_1^3(1\ leto) = 0{,}333^3 = 0{,}037 \qquad (62)$$

Verjetnost delovanja po prvem letu je precej majhna, kar je pričakovana, saj je že zanesljivost posamezne komponente zelo majhna.

Odgovor ad b)

Zanesljivost vzporedno vezanih komponent izračunamo po enačbi 48.

$$R_s(1\ leto) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(1 - R_i(t)\big) = 1 - \big(1 - R_i(1\ leto)\big)^3 = 1 - (1 - 0{,}333)^3 = 0{,}70325 \qquad (63)$$

Verjetnost delovanja sistema vzporedno (redundanca) vezanih komponent je velika, precej večja, kot če bi imeli samo eno komponento ali več komponent, vezanih zaporedno.

Odgovor ad c)

Zanesljivost sistema bomo rešili z upoštevanjem zahteve po delovanju vsaj dveh komponent. To je primer k od n vezave (Poglavje 6.3).

$$R_s(t) = \sum_{x=k}^{n} p(x) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} R^x \cdot (1 - R)^{n-x} \qquad (64)$$

Sledi za vsoto: $x = 2 \text{ in } 3$

$$R_s(1\ leto) = \sum_{x=k=2}^{3}\binom{3}{x}R^x \cdot (1-R)^{3-x} = \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1}\cdot 0{,}333^2 \cdot 0{,}667 + \frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}\cdot 0{,}333^3 \cdot 1 =$$

$$R_s(1\ leto) = 0{,}2592 \qquad (65)$$

Ker je zahtevano, da v vsakem času delujeta vsaj dve od treh komponent sistema, je zaradi nizke zanesljivosti komponent verjetnost delovanja sistema po prvem letu relativno nizka.

Odgovor ad d)

Sledi za vsoto: $x = 1, 2 \text{ in } 3$

$$R_s(1\ leto) = \sum_{x=k=1}^{3}\binom{3}{x}R^x \cdot (1-R)^{3-x} =$$

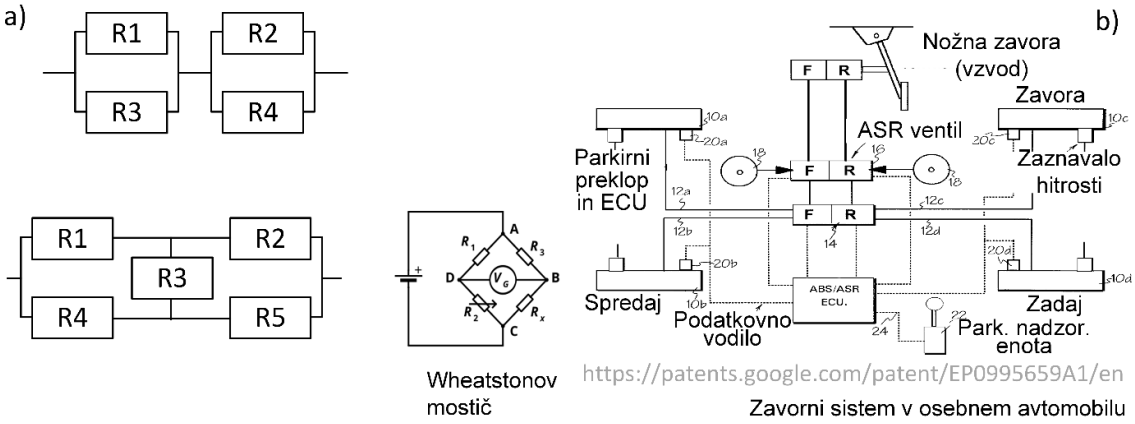
$$= \frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1}\cdot 0{,}333^1 \cdot 0{,}667^2 + \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1}\cdot 0{,}333^2 \cdot 0{,}667^1 + \frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}\cdot 0{,}333^3 \cdot 1 =$$

$$R_s(1\ leto) = 0{,}7033 \qquad (66)$$

Rezultat pričakovano kaže enako zanesljivost kot v primeru vzporedne vezave komponent, kjer je za delovanje sistema dovolj delovanje samo ene komponente.

6.4 Teoretična izhodišča kompleksnih vezav komponent v sistem

Predvsem v elektroniki in elektrotehniki in tudi v mehaniki obstajajo sistemi, ki jih za izračun zanesljivosti ni mogoče »poenostaviti« s pomočjo pravil za preprosto zaporedno in vzporedno vezane komponente. Taki sistemi imajo komponente vezane kompleksno (glej Sliko 27). Metode, ki se uporabljajo za reševanje, temeljijo na dekompoziciji, naštevanju, minimalnih rezih, minimalnih poteh …



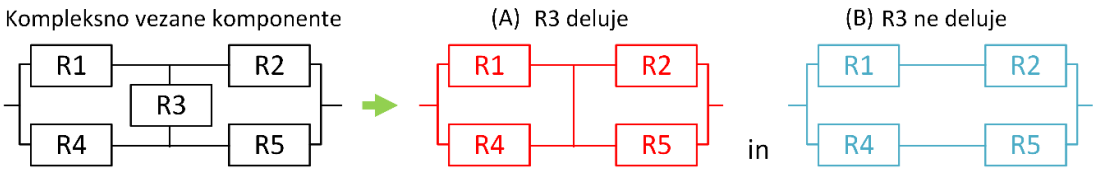
Slika 27: Primerjava med sistemoma z a) preprosto vezavo komponent in b) kompleksno vezavo komponent. Vir slike zavornega sistema [14].

6.4.1 Metoda dekompozicije

Metoda temelji na postopku delitve sistema na dva dela, točka delitve pa je navadno komponento, zaradi katere je sistem kompleksen. Za to komponento določimo dve stanji:

a) <u>delujoče stanje</u> s pripadajočo verjetnostjo $R_i(t)$ in
b) <u>nedelujoče stanje</u> s pripadajočo verjetnostjo $1 - R_i(t)$.

Ker smo delovanje komponente natančno definirali, v shemi to predstavimo ad a) s polno črto, po kateri informacija/material ipd. lahko nemoteno prehaja in ad b) s prekinjeno črto, kjer prehod ni mogoč. To bistveno poenostavi reševanje sistema in določevanje preprostih vezav komponent. Primer je prikazan na Sliki 28a.



Slika 28: Metoda dekompozicije za reševanje sistemov s kompleksno vezanimi komponentami.

Zanesljivost kompleksno vezanih komponent

Zanesljivost sistema kompleksno vezanih komponent, ki smo ga predelali s pomočjo metode dekompozicije, izračunamo po naslednji enačbi:

$$R_s(t) = R_3(t) \cdot R_A(t) + \left(1 - R_{3(t)}\right) \cdot R_B(t) \qquad (67)$$

kjer R_3 (t) predstavlja zanesljivost komponente R3, $R_{\mathrm{A}}(t)$ predstavlja zanesljivost poenostavljenega sistema na Sliki 28b ob predpostavki delujoče R3 in $R_{\mathrm{B}}(t)$ predstavlja zanesljivost poenostavljenega sistema na Sliki 28c ob predpostavki nedelujoče R3.

Zapisano skupaj za izračun zanesljivosti sistema:

$$R_s(t) = R_3(t) \cdot \left[1 - \left(1 - R_1(t)\right) \cdot \left(1 - R_4(t)\right)\right] \cdot \left[1 - \left(1 - R_2(t)\right) \cdot \left(1 - R_5(t)\right)\right] +$$

$$+\left(1 - R_3(t)\right) \cdot \left[1 - \left(1 - R_1(t) \cdot R_2(t)\right) \cdot \left(1 - R_4(t) \cdot R_5(t)\right)\right] \qquad (68)$$

6.4.2 Metoda naštevanja

Metoda temelji na naštevanju vseh možnih izidov kombinacij delovanja in nedelovanja komponent ter posledično stanja celotnega sistema. Ta metoda je bolj primerna za manjše in manj kompleksne sisteme. Velja predpostavka, da so dogodki oz. stanja komponent medsebojno neodvisni. Večje kot je število komponent, večje je število kombinacij, ki jih moramo našteti. Na Sliki 28a prikazani kompleksni sistem s petimi komponentami tako obstaja $2^5 = 32$ kombinacij. Verjetnost delovanja posamezne kombinacije izračunamo kot produkt vseh verjetnosti delovanja $R_i(t)$ komponent oz. $1 - R_i(t)$, če je v kombinaciji nedelujoča komponenta. Zanesljivost sistema izračunamo v zadnjem koraku kot vsoto vseh verjetnosti delovanja posameznih kombinacij. Izpis kombinacij za primer na Sliki 28a:

1. Kombinacija: vse komponente delujejo -> verjetnost delovanja te kombinacije je $R_{\text{KOMBINACIJA_1}}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t) \cdot R_5(t)$
2. Kombinacija: vse komponente razen prve delujejo -> verjetnost delovanja te kombinacije je $R_{\text{KOMBINACIJA_2}}(t) = (1 - R_1(t)) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t) \cdot R_5(t)$
3. …
4. Kombinacija: vse komponente ne delujejo -> verjetnost delovanja te kombinacije je $R_{\text{KOMBINACIJA_32}}(t) = (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \cdot (1 - R_3(t)) \cdot (1 - R_4(t)) \cdot (1 - R_5(t))$

6.4.3 Metoda funkcijske strukture

Med splošnejšimi metodami za analizo sistemov kompleksno vezanih komponent je metoda funkcijske strukture. Tu v ospredje postavimo funkcijo (stanje) komponent in sistema in se sprva še ne ukvarjamo s statističnimi verjetnostmi.

Metoda predvideva dve (nesočasni) stanji za vsako komponento X_i; delujoče stanje ($X_i = 1$) ali nedelujoče stanje ($X_i = 0$). Iz tega sledi, da lahko sistem s funkcijsko strukturo $\Psi(X)$ deluje ($\Psi(X) = 1$) ali pa ne ($\Psi(X) = 0$)! Kjer uporabljeni X predstavlja vektor stanj vseh komponent izdelka $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$.

Funkcijsko strukturo zaporedno vezanih komponent zapišemo kot:

$$\Psi(X) = \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad (69)$$

Funkcijsko strukturo vzporedno vezanih komponent zapišemo kot:

$$\Psi(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i) \qquad (70)$$

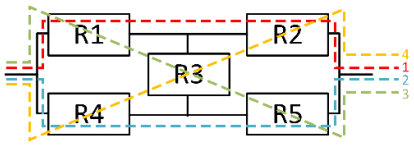
Pri reševanju funkcijske strukture lahko končno enačbo močno poenostavimo, če upoštevamo, da ima komponenta v delujočem stanju lahko samo vrednost 1. Sledi, da $X_i^m = X_i$, kjer $m \in \mathbb{N}$ predstavlja pripadajoči eksponent iz predhodnega računanja strukture.

Zanesljivost sistema $R_{\text{s}}(t)$ izračunamo tako, da vse X_i v poenostavljeni končni enačbi nadomestimo s pripadajočimi vrednostmi zanesljivosti komponent $R_{\text{i}}(t)$.

$$R_s(t) = Pr\{\Psi(X) = 1\} \qquad (71)$$

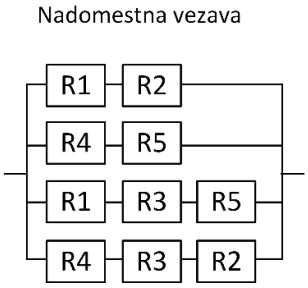
Minimalne poti (zgornja meja zanesljivosti)

Zanesljivost sistema določimo tako, da poiščemo množice (poti) z najmanj potrebnimi komponenti, ki morajo biti v stanju delovanja, da deluje tudi sistem. Minimalne poti vežemo v vzporedno vezavo.



i	Minimalna pot P_i	Vektor minimalne poti X_i
1	{1,2}	[1,1,0,0,0]
2	{4,5}	[0,0,0,1,1]
3	{1,3,5}	[1,0,1,0,1]
4	{4,3,2}	[0,1,1,1,0]

a)



b)

Slika 29: Metoda minimalnih poti a) prepoznane poti in b) nadomestna vezava.

Če rešujemo enačbo brez funkcijske strukture in neposredno z vrednostmi zanesljivosti $R_{\mathrm{i}}(t)$ komponent, dobimo zgornjo mejo zanesljivosti sistema.

$$R_s(t) = 1 - \big(1 - R_1(t) \cdot R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t) \cdot R_5(t)\big) \cdot \big(1 - R_1(t) \cdot R_3(t) \cdot R_5(t)\big) \cdot \big(1 - R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t)\big) \quad (72)$$

Ta je vedno ocenjena višje od »eksaktne« vrednosti, izračunane s funkcijsko strukturo, za katero velja enačba:

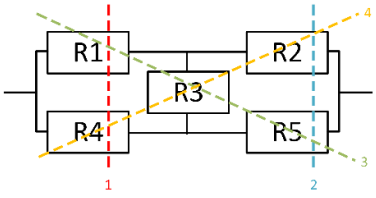
$$\Psi(X) = 1 - (1 - X_1 \cdot X_2) \cdot (1 - X_4 \cdot X_5) \cdot (1 - X_1 \cdot X_3 \cdot X_5) \cdot (1 - X_2 \cdot X_3 \cdot X_4)$$

$$= X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_3 \cdot X_5 - X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_5 + X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 \cdot X_5 + X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 \cdot X_5 + X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5^2 + X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5^2 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 \cdot X_5^2 - X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 \cdot X_5^2$$

$$= X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_3 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_5 + X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \quad (73)$$

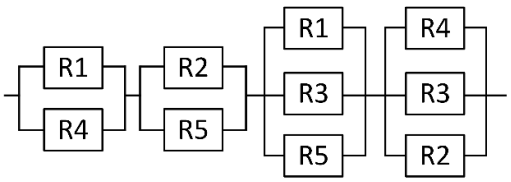
Minimalni rezi (spodnja meja zanesljivosti)

Zanesljivost sistema določimo tako, da poiščemo množice (reze) z najmanj potrebnimi komponent, ki morajo biti v stanju nedelovanja, da tudi sistem ne deluje. Minimalne reze vežemo v zaporedno vezavo.



i	Minimalni rez C_i	Vektor minimalnega reza X_i
1	{1,4}	[1,0,0,1,0]
2	{2,5}	[0,1,0,0,1]
3	{1,3,5}	[1,0,1,0,1]
4	{4,3,2}	[0,1,1,1,0]

a)



b)

Slika 30: Metoda minimalnih rezov a) prepoznani rezi in b) nadomestna vezava.

Če rešujemo enačbo brez funkcijske strukture in neposredno z vrednostmi zanesljivosti $R_i(t)$ komponent, dobimo spodnjo mejo zanesljivosti sistema.

$$R_s(t) = [1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t))] \cdot [1 - (1 - R_2(t)) \cdot (1 - R_5(t))] \cdot [1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_3(t)) \cdot (1 - R_5(t))] \cdot [1 - (1 - R_2(t)) \cdot (1 - R_3(t)) \cdot (1 - R_4(t))] \quad (74)$$

Ta je vedno ocenjena nižje od »eksaktne« vrednosti, izračunane s funkcijsko strukturo, za katero velja enačba:

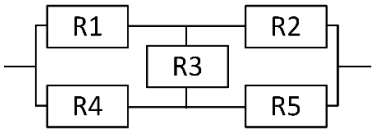
$$\Psi(X) = [1 - (1 - X_1) \cdot (1 - X_4)] \cdot [1 - (1 - X_2) \cdot (1 - X_5)] \cdot [1 - (1 - X_1) \cdot (1 - X_3) \cdot (1 - X_5)] \cdot [1 - (1 - X_2) \cdot (1 - X_3)(1 - X_4)]$$

$$= \cdots$$

$$= X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_3 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_5 + X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 - X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \quad (75)$$

Računski primer

Kompleksni sistem sestavlja pet komponent. Komponente imajo poznano zanesljivost; $R_1(t) = 0{,}9$, $R_2(t) = 0{,}95$, $R_3(t) = 0{,}8$, $R_4(t) = 0{,}9$ in $R_5(t) = 0{,}95$. Za ta sistem določimo zanesljivost delovanja z metodo a) naštevanja, b) dekompozicije, c) funkcijske strukture – minimalne poti in d) funkcijske strukture - minimalni rezi.



Slika 31: Kompleksni sistem.

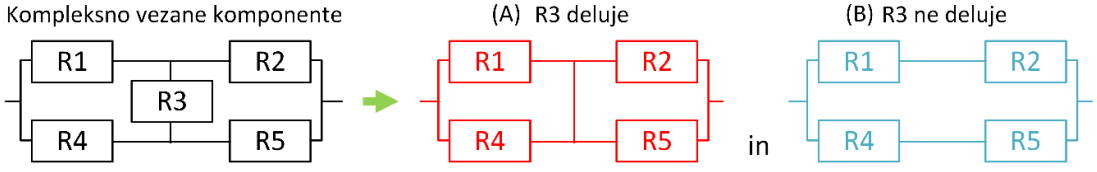
Odgovor ad a) Naštevanje: sistem s petimi komponentami ima $2^5 = 32$ kombinacij. Pa jih naštejmo (glej tabelo 3)

Kontrolni preračun vsote vseh delujočih stanj na koncu tabele $\sum R_i(t) = R(t) = 0{,}9858$ podaja vrednost zanesljivosti, vsota vrednosti vseh nedelujočih stanj pa kumulativno vrednost ali verjetnost odpovedi $F(t) = 0{,}0142 = 1 - R(t)$.

Tabela 3: Tabela kombinacij po metodi naštevanja, za delujoče komponente (D) in nedelujoče komponente (N).

i	*R*1	*R*2	*R*3	*R*4	*R*5	Sistem	Verjetnost da sist. deluje	Verjetnost da sist. ne deluje
1	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	0,584820	
2	*N*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	0,064980	
3	*D*	*N*	*D*	*D*	*D*	*D*	0,030780	
4	*D*	*D*	*N*	*D*	*D*	*D*	0,146205	
5	*D*	*D*	*D*	*N*	*D*	*D*	0,649800	
6	*D*	*D*	*D*	*D*	*N*	*D*	0,030780	
7	*N*	N	*D*	*D*	*D*	*D*	0,003420	
8	*D*	*N*	*N*	*D*	*D*	*D*	0,007695	
9	*D*	*D*	*N*	*N*	*D*	*D*	0,016245	
10	*D*	*D*	*D*	*N*	*N*	*D*	*0,003420*	
11	*N*	*D*	*N*	*D*	*D*	*D*	0,016245	
12	*N*	*D*	*D*	*N*	*D*	*N*		0,007220
13	*N*	*D*	*D*	*D*	*N*	*D*	0,003420	
14	*D*	*N*	*D*	*N*	*D*	*D*	0,003420	
15	*D*	*N*	*D*	*D*	*N*	*N*		0,001620
16	*D*	*D*	*N*	*D*	*N*	*D*	0,007695	
17	*N*	*N*	*N*	*D*	*D*	*D*	0,000855	
18	*D*	*N*	*N*	*N*	*D*	*N*		0,00855
19	*D*	*D*	*D*	*N*	*N*	*D*	0,000855	
20	*N*	*D*	*N*	*N*	*D*	*N*		0,001805
21	*N*	*D*	*D*	*N*	*N*	*N*		0,000380
22	*D*	*N*	*D*	*N*	*N*	*N*		0,000180
23	*N*	*N*	*D*	*N*	*D*	*N*		0,000380
24	*N*	*N*	*D*	*D*	*N*	*N*		0,000180
25	*D*	*N*	*N*	*D*	*N*	*N*		0,000405
26	*N*	*D*	*N*	*D*	*N*	*N*		0,000855
27	*N*	*N*	*N*	*N*	*D*	*N*		0,000095
28	*D*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*		0,000045
29	*N*	*D*	*N*	*N*	*N*	*N*		0,000095
30	*N*	*N*	*D*	*N*	*N*	*N*		0,000020
31	*N*	*N*	*N*	*D*	*N*	*N*		0,000045
32	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*		0,000005
						Kontrola (*R(t)+F(t)=1*)	**∑=0,985815**	**∑=0,014185**

Odgovor ad b) Dekompozicija: komponenta, ki dela sistem kompleksno vezan je komponenta $R3$ (Slika 32). Sistem razdelimo na dva podsistema; prvi podsistem (A), kjer predpostavimo, da komponenta $R3$ deluje, in drugi (B), kjer predpostavimo, da komponenta $R3$ ne deluje.



Slika 32: Grafična predstavitev postopka dekompozicije.

Podsistem A je kombinirani sistem preprosto vezanih komponent (zaporedna vezava vzporedno vezanih komponent). Rešitev tega podsistema je:

$$R_{s_A}(t) = \Big(1 - \big(1 - R_1(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t)\big)\Big) \cdot \Big(1 - \big(1 - R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_5(t)\big)\Big) =$$

$$= \big(1 - (1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}9)\big) \cdot \big(1 - (1 - 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}95)\big) = 0{,}9875 \qquad (76)$$

Podsistem B je kombinirani sistem preprosto vezanih komponent (vzporedna vezava zaporedno vezanih komponent). Rešitev tega podsistema je:

$$R_{s_B}(t) = 1 - \big(1 - R_1(t) \cdot R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t) \cdot R_5(t)\big) =$$

$$= 1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95) = 0{,}9790 \qquad (77)$$

Za sistem tako velja kombinacija

$$R_s(t) = R_3(t) \cdot R_{s_A}(t) + \big(1 - R_3(t)\big) \cdot R_{s_B}(t) = 0{,}8 \cdot 0{,}9875 + 0{,}2 \cdot 0{,}9790 = 0{,}9858 \qquad (78)$$

Primerjava z rezultatom iz prejšnje točke (sklic na tabelo 3) potrjuje pravilnost preračuna.

Odgovor ad c) Funkcijska struktura – minimalne poti. Sistem ovrednotimo glede na komponente, ki morajo delovati, da sistem tudi deluje. Glede na sistem s Slike 29 zapišemo enačbo vzporedne vezave zaporedno vezanih komponent.

$$R_{s_poti}(t) = 1 - \big(1 - R_1(t) \cdot R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t) \cdot R_5(t)\big) \cdot \big(1 - R_1(t) \cdot R_3(t) \cdot R_5(t)\big) \cdot \big(1 - R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_4(t)\big) \qquad (79)$$

Vstavimo vrednosti zanesljivosti za posamezno komponento in dobimo zgornjo mejo zanesljivosti:

$$R_{s_poti}(t) = 1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9) = R_{s_poti}(t) = 0{,}9980 = R_{s_max} \qquad (80)$$

Sedaj nadomestimo vrednosti zanesljivosti $R_i(t)$ s funkcijsko naključno spremenljivko $X_i(t)$, ki ima samo dve stanji (deluje ali ne deluje).

$$\Psi(X) = 1 - (1 - X_1 \cdot X_2) \cdot \big(1 - X_4(t) \cdot X_5(t)\big) \cdot \big(1 - X_1(t) \cdot X_3(t) \cdot X_5(t)\big) \cdot \big(1 - X_2(t) \cdot X_3(t) \cdot X_4(t)\big) \quad (81)$$

Kar se z upoštevanjem $X_i^m = X_i$ poenostavi in potem z zamenjavo $X_i = R_i(t)$ izračuna »dejanska« zanesljivost sistema $R_s(t) = \mathrm{E}[\Psi(X)] = 0{,}9858$.

Odgovor ad d) Funkcijska struktura – minimalni rezi. Sistem ovrednotimo še glede na minimalno število komponent, ki ne smejo delovati, da sistem tudi ne deluje.

$$R_{s_rezi}(t) = \big[1 - \big(1 - R_1(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t)\big)\big] \cdot \big[1 - \big(1 - R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_5(t)\big)\big] \cdot \big[1 - \big(1 - R_1(t)\big) \cdot \big(1 - R_3(t)\big) \cdot \big(1 - R_5(t)\big)\big] \cdot \big[1 - \big(1 - R_2(t)\big) \cdot \big(1 - R_3(t)\big) \cdot \big(1 - R_4(t)\big)\big]$$

$$R_{s_rezi}(t) = 0{,}9856 = R_{s_min} \quad (82)$$

Za kontrolo zdaj nadomestimo vrednosti zanesljivosti $R_i(t)$ s funkcijsko naključno spremenljivko $X_i(t)$, ki ima samo dve stanji (deluje ali ne deluje), in izračunajmo »dejansko« zanesljivost sistema po tej shemi $R_s(t) = \mathrm{E}[\Psi(X)] = 0{,}9858$.

Ponovno dobimo enak rezultat kot prej, kar potrjuje pravilnost izračuna. Za konec še povzemimo relacije:

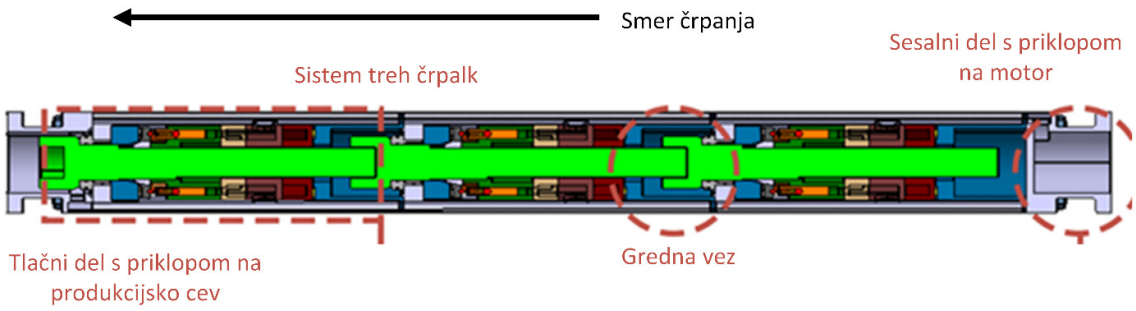
$$R_{s_rezi}(t) < R_s(t) < R_{s_poti}(t) \quad (83)$$

Na tem mestu razmislimo o praktičnih vidikih in možnostih kompleksnih vezav v realnih sistemih. Električna vezja lahko zaradi postavitve in načina delovanja električnih komponent hitro postanejo kompleksna, medtem pa so vezave mehanskih komponent velikokrat omejene predvsem na preproste kombinacije vzporedno-zaporedno vezanih komponent. Razlog je v delitvi moči, ki jo je pri takih sistemih treba izvesti mehansko in zato predvideti ustrezne komponente, na primer diferencial. To so dodatne komponente, ki predstavljajo strošek, vplivajo na skupno zanesljivost ter povečujejo gabarite naprave.

Tudi v primeru razvite črpalke so ozko postavljene zahteve po volumskem pretoku in danih geometrijskih omejitvah vodile do odločitve, da ena aksialna batna črpalka ne more zadostiti pogojev in bo zato treba več črpalk združiti v sistem črpalnih enot. Izhodiščni pogoj je

namestitev na skupni izvor moči (močan elektro motor na najnižji točki sistema), kar posledično definira zaporedno vezavo črpalk. Črpalni sistem naj bi omogočal tudi morebitno prilagajanje načrpane količine tekočine, vendar ne da bi bilo za to treba bistveno spreminjati parametre motorja. To pomeni, da se ob zmanjšani potrebi/porabi nekaj črpalk ustavi oz. vključi ob povečani potrebi. Pri tem nobena od črpalk ne sme ostati brez dostopa do vira tekočine ali dostopa do produkcijske cevi (visok tlak) za pretok do površja. Tok tekočine znotraj črpalnega sistema tako zahteva vzporedno vezavo črpalk.

Možnih rešitev ni bilo prav veliko … Izbrali smo tisto, ki ima največjo zanesljivost delovanja in katere izdelavo je mogoče tudi stroškovno upravičiti. Zaporedno vezavo komponent, ki omogoča prenos moči, smo zagotovili s centralno postavljeno gredjo, na katero prek mehanskih sklopk priklapljamo črpalke (samostojne črpalne enote). Primer zaporedne vezave črpalk z gredno vezjo je prikazan na Sliki 33. Vzporednost pretakanja smo zagotovili s sistemom obtočnih kanalov, ki ležijo na obodu znotraj posamezne črpalke. Primer je prikazan na Sliki 19. Lega, velikost in število teh kanalov mora biti za pravilno delovanje identično na vseh črpalkah.



Slika 33: Črpalni sistem treh črpalk.

Pri bolj natančnem pregledu funkcijske sheme in delitve moči hitro ugotovimo, da znotraj posamezne črpalke lahko najdemo podsisteme vzporedno in zaporedno vezanih komponent, na primer bati s protipovratnimi ventili ipd. Za te je vredno omeniti, da imajo poleg stanja delovanj in nedelovanja tudi tretje stanje, npr. slabše delovanje zaradi obrabe. Tega z obravnavanimi metodami ni mogoče upoštevati. Več o tematiki izračuna zanesljivosti z upoštevanjem t. i. degradiranih sistemih si lahko preberete v [8]. Ob koncu poglavja sledi še nekaj računskih nalog za utrjevanje znanja.

6.4.4 Računske naloge

1. Čas do okvare računalnika (v letih) ima naslednjo gostoto porazdelitve verjetnosti

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \quad ; \text{za } t \geq 0$$

(a) Če so trije taki računalniki vezani vzporedno, kakšna je njihova zanesljivost prvih 6 mesecev delovanja?

(b) Kakšna je uporabna doba sistema v dneh, če je zahtevana zanesljivost 0,999?

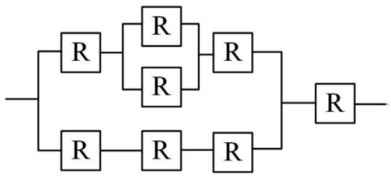
(c) Kakšna je zanesljivost sistema po 6 mesecih, če 2 od 3 računalnikov morata delati?

2. Kateri sistem ima večjo zanesljivost po 100 urah obratovanja?

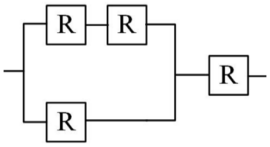
(a) Dve komponenti s konstantno intenzivnostjo okvar, vezani vzporedno. Vsaka ima $MTTF = 1000\ \text{h}$.

(b) Dve komponenti, vezani zaporedno. Prva ima Weibullovo intenzivnost okvar ($\beta = 2, \theta = 10000$ h) in druga konstantno intenzivnost okvar ($\lambda = 0{,}00005\ \text{okvar/h}$).

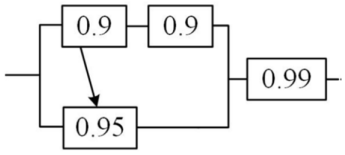
3. Za shemo na sliki izpeljite izraz za skupno zanesljivost $R_s(t)$, pri tem pa predpostavite, da imajo vse komponente enako zanesljivost $R(t)$. Izračunajte skupno zanesljivost sistema, če je $R(t) = 0{,}9$.



4. Določite potrebno zanesljivost komponente $R(t)$ na spodnji sliki, če je zahtevana zanesljivost sistema $R_s(t) = 0{,}99$.



5. Določite zanesljivost sistema na spodnji sliki.



(a) Metodi dekompozicije.

(b) Metodi naštevanja.

(c) Metodi minimalnih poti (*zg. meja zanesljivosti in s funkcijsko strukturo*).

(d) Metodi minimalnih rezov (*sp. meja zanesljivosti in s funkcijsko strukturo*).

Rešitve:

1. $R(0{,}5) = 0{,}96296$; $t = 40{,}56$ dneva; $R_{\mathrm{s}}(t) = 0{,}7412$
2. $R_{\mathrm{s_1}}(t) = 0{,}99094$; $R_{\mathrm{s_2}}(t) = 0{,}9949$
3. $R_{\mathrm{s}}(t) = R^8 - R^7 - R^5 + 2 \cdot R^4 = 0{,}6739$
4. $R(t) = 0{,}99$
5. $R_{\mathrm{s_a}}(t) = 0{,}9806$; $R_{\mathrm{s_b}}(t) = 0{,}9806$; $R_{\mathrm{s_c}}(t) = 0{,}989$ in $R_{\mathrm{s_c}}(t) = 0{,}9806$; $R_{\mathrm{s_d}}(t) = 0{,}9801$ in $R_{\mathrm{s_d}}(t) = 0{,}9806$;

6.5 Alokacija zanesljivosti

Na osnovi zahtevane zanesljivosti sistema in zdaj že znane funkcijske strukture lahko določimo (alociramo) potrebno zanesljivost po posamezni komponenti. V splošnem mora veljati, da je ciljna zanesljivost sistema $R_s^*(t)$ vedno dosežena ali presežena.

$$f\{R_1(t), R_2(t), R_3(t) \dots, R_n(t)\} \geq R_s^*(t) \qquad (84)$$

Kjer $f\{R_1(t), R_2(t), R_3(t) \dots, R_n(t)\}$ predstavlja matematično funkcijo, po kateri izračunamo zanesljivost sistema. Ta je odvisna od vezave komponent ter zanesljivosti po posameznih komponentah $R_i(t)$. Poleg alokacije zanesljivosti se lahko v funkciji upoštevata tudi stroškovni kriterij in ceno komponent.



Slika 34: Alokacija zanesljivosti.

Alokacijo zanesljivosti lahko izvedemo s poskušanjem, vendar je zaradi velikega števila kombinacij to zelo nepraktično. V tem poglavju so zato predstavljene tri metode (optimalna alokacija, *ARINC*, *AGREE*), s katerimi izvedemo alokacijo matematično.

6.5.1 Optimalna alokacija

Pri metodi optimalne alokacije je glavni kriterij minimalni strošek $C = C\{C_i(x_i)\}$ predstavlja funkcijo stroškov povečanja zanesljivosti *i*-te komponente).

$$min\, C = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) \qquad (85)$$

In za primer zaporedno vezanih komponent ciljna zanesljivost sistema $R_s^*(t)$

$$R_s^*(t) \geq \prod_{i=1}^{n}(R_i + x_i) \quad za \quad 0 < R_i + x_i \leq B_i < 1; \quad i = 1,2,3 \ldots, n \tag{86}$$

kjer R_i predstavlja zanesljivost i-te komponente, x_i predstavlja vrednost prirastka zanesljivosti i-te komponente, B_i je zgornja meja zanesljivosti posamezne komponente.

Funkcijo stroškov povečanje zanesljivosti po komponenti $C_i(x_i)$ je težko določiti, zelo pogosto je to konveksna funkcija. Najpreprostejša konveksna funkcija je polinom drugega reda (kvadratna funkcija), zato lahko zapišemo:

$$min\, C = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(c_i \cdot x_i^2) \tag{87}$$

kjer je c_i faktor dviga stroška za izboljšanja zanesljivosti po komponenti. Optimalne vrednosti izračunamo z Lagrangeevo metodo [8]. Rešitev po komponenti je:

$$x_i = \frac{-2 \cdot c_i \cdot R_i + \sqrt{4 \cdot c_i^2 \cdot R_i^2 + 8 \cdot c_i \cdot \theta \cdot R_s^*}}{4 \cdot c_i} \tag{88}$$

kjer je θ Lagrangeev multiplikator.

6.5.2 ARINC-metoda

Metodo je razvila družba *Aeronautical Radio, Incorporated* (*ARINC*), ustanovljena leta 1929 v ZDA, ki je bila glavna ponudnica transportnih komunikacij in sistemskih inženirskih rešitev za osem industrij: letalstvo, letališča, obramba, vlada, zdravstvo, omrežja, varnost in transport. Metoda temelji na predpostavki, da je sistem zgrajen iz podsistemov, ki pa so vezani zaporedno (v seriji).



Slika 35: ARINC-metoda alokacije zanesljivosti.

Predpostavljena je konstantna intenzivnost okvar $\lambda(t) = \lambda$ in neodvisni podsistemi (komponente). Zanesljivost sistema temelji na uteženih vrednostih zanesljivostih posameznih podsistemov. Uteži w_i določimo na podlagi razmerja med intenzivnostjo okvare λ_i i-tega podsistema in trenutno intenzivnostjo okvar sistema λ_s:

$$w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_s} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{89}$$

Izboljšanje zanesljivosti po podsistemu, ki da želeno ciljno zanesljivost sistema $R_s^*(t) = e^{\lambda_s^* \cdot t}$ nato izračunamo kot produkt uteži in intenzivnosti okvar za sistem, ki da ciljno zanesljivost.

$$\lambda_i = w_i \cdot \lambda_s^* \tag{90}$$

6.5.3 AGREE-metoda

AGREE (*angl. Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment*[6]) metoda temelji na predpostavki, da sistem sestavlja več (n) komponent, ki so zgrajene iz večjega števila (n_i) vzporedno vezanih modulov oz. podkomponent. Metoda omogoča, da komponente delujejo krajši čas, kot je predviden za delovanje sistema ter vpeljuje faktor vpliva (w_i – verjetnost, da bo sistem odpovedal zaradi odpovedi i-te komponente).

Najprej določimo ciljno zanesljivost sistema, kjer predpostavimo enakovredno delitev zanesljivosti po modulih:

$$R_s^*(t) = \prod_{i=1}^{n} [R_s^*(t)]^{n_i/N} \tag{91}$$

kjer N predstavlja celotno število vseh modulov $N = \sum n_i$ in $[R_s^*(t)]^{n_i/N}$ predstavlja zanesljivost i-te komponente. Ob predpostavki eksponentne gostote porazdelitve verjetnosti okvar in upoštevanjem faktorja vpliva zdaj zapišemo verjetnost, da odpoved i-te komponente povzroči odpoved sistema (leva stran enačbe 92) in verjetnost odpovedi i-te komponente (desna stran enačbe 92).

[6] https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20160013858/downloads/20160013858.pdf

$$w_i\left(1 - e^{-\lambda_i \cdot t_i}\right) = 1 - [R_s^*(t)]^{n_i/N} \qquad (92)$$

za w_i verjetnost odpovedi sistema ob odpovedi i-te komponente (*angl. Importance index*), intenzivnost okvar λ_i in predvideni čas delovanja t_i i-te komponente ter predvideni čas delovanja sistema t. Intenzivnost okvar i-te komponente je takrat:

$$\lambda_i = -\frac{1}{t_i} \cdot ln\left(1 - \frac{1-[R_s^*(t)]^{n_i/N}}{w_i}\right); \quad za\, i = 1,2, \dots, n \qquad (93)$$

Če okvara komponente ne povzroči nujno okvare izdelka ($w_i < 1$), je zanesljivost vedno manjša ali največ enaka ciljni zanesljivosti sistema $R_s^*(t)$.

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i \cdot t_i} \leq R_s^*(t); \quad za\, i = 1,2, \dots, n \qquad (94)$$

Alokacija zanesljivosti lahko pomembno pomaga pri izboljšanju skupne zanesljivosti, pri čemer so spremembe jasno določene in tudi stroškovno ovrednotene. Velja omeniti, da je alokacija zanesljivosti prototipa navadno zaradi pomanjkanja podatkov zahtevna, če ne nemogoča. Komponente so lahko tudi nestandardne in popolnoma namenske, velikokrat brez možnosti zamenjave ali izboljšave.

Pri razvoju črpalke nismo razpolagali s podatki o zanesljivostih posameznih komponent in tudi cene prototipnih komponent so višje od cen serijsko proizvedenih komponent, zato alokacije zanesljivosti (še) nismo mogli izvesti.

Računski primer

Sistem sestavljata dve komponenti. Komponenta A ima intenzivnost okvar $\lambda_A = 20$ okvar/leto in Komponenta B ima intenzivnost okvar $\lambda_B = 5$ okvar/leto Ciljna intenzivnost okvar za sistem je $\lambda_s^* = 12{,}5$ okvare/leto. Koliko morata biti za doseganje cilja intenzivnosti okvar komponent (*ARINC*-metoda)?

Odgovor)

Za določitev uteži w_i po enačbi (89) najprej določimo trenutno intenzivnostjo okvar sistema λ_s z uporabo enačbe (28):

$$\lambda_s = \lambda_A + \lambda_B = 20 + 5 = 25\ okvar/leto \qquad (95)$$

Opomba: metoda predpostavlja konstantno intenzivnost okvar (eksponentni model) in zaporedno vezane komponente.

Uteži so tako:

$$w_A = \frac{\lambda_A}{\lambda_s} = \frac{20\ okvar/leto}{25\ okvar/leto} = 0{,}8 \qquad (96)$$

$$w_B = \frac{\lambda_B}{\lambda_s} = \frac{5\ okvar/leto}{25\ okvar/leto} = 0{,}2 \qquad (97)$$

Po enačbi (90) izračunajmo potrebne intenzivnosti okvar komponent A in B.

$$\lambda_A^* = w_A \cdot \lambda_s^* = 0{,}8 \cdot 12{,}5\ okvare/leto = 10\ okvar/leto \qquad (98)$$

$$\lambda_B^* = w_B \cdot \lambda_s^* = 0{,}2 \cdot 12{,}5\ okvare/leto = 2{,}5\ okvare/leto \qquad (99)$$

Kratek kontrolni preračun $\lambda_{\mathrm{A}}^* + \lambda_{\mathrm{B}}^* = \lambda_{\mathrm{s}}^*$ potrdi pravilnost preračuna.

6.5.4 Računske naloge

1. Podjetje izdeluje vesoljsko postajo, ki je sestavljena iz štirih večjih podsistemov, kjer ima vsak podsistem Weibullovo porazdelitev okvar.

Podsistem	$\boldsymbol{\theta}$ **[leto]**	$\boldsymbol{\beta}$ **[/]**
Računalnik (R)	3,5	0,91
Letalska elektronika (L)	4,0	0,80
Konstrukcija (K)	5,0	1,80
Reševalni sistem (RŠ)	6,0	1,00

Zanesljivost sistema po koncu prvega leta mora biti 0,995. Določite (poenostavljeno) za koliko odstotkov je treba povečati zanesljivost posameznega podsistema, da dosežemo ciljno zanesljivost. Predpostavite, da je ciljna zanesljivost vsakega podsistema enaka (namig: enake uteži).

2. Če je redundanca edini način, da dosežemo rast zanesljivosti posameznega podsistema naloge 1), kakšno je potem minimalno število redundantnih enot vsakega podsistema, da dosežemo ciljno zanesljivost podsistema?

3. Z *ARINC*-metodo določite povprečno ciljno zanesljivost posameznega podsistema naloge 1). Predpostavite, da se bo z rastjo zanesljivosti izboljšala le karakteristična doba (parameter velikosti) in ne tudi parameter oblike. Kakšna je ciljna karakteristična doba posameznega podsistema?

4. Z uporabo *AGREE*-metode izračunajte zanesljivost in *MTTF*-osebnega računalnika sestavljenega iz spodnjih komponent. Ciljna zanesljivost za prvo leto delovanja je 0,99.

Komponenta i	**Število delov n_i**	**Faktor vpliva w_i**	**Čas delovanje [h/leto] t_i**
Matična plošča (*MP*)	153	0,95	2000
Trdi disk (*TD*)	28	0,90	1000
Napajalnik (*N*)	34	1,00	2000

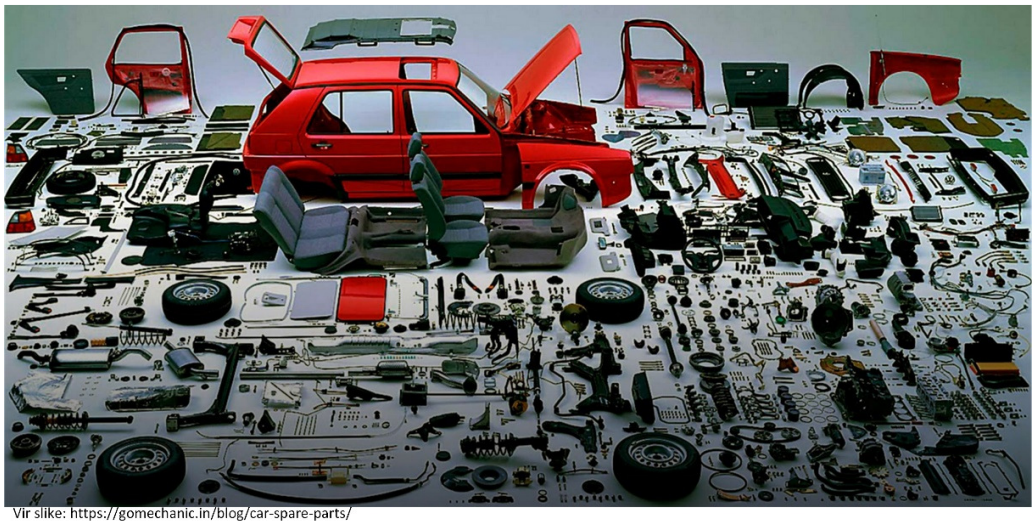
<u>Rešitve:</u>

1. $\Delta_{\mathrm{L}} = 38{,}91\ \%;\ \Delta_{\mathrm{R}} = 37{,}52\ \%;\ \Delta_{\mathrm{K}} = 5{,}54\ \%;\ \Delta_{\mathrm{RŠ}} = 17{,}99\ \%$
2. $n_{\mathrm{R}} = 6;\ n_{\mathrm{L}} = 6;\ n_{\mathrm{K}} = 3;\ n_{\mathrm{RŠ}} = 4$
3. $\theta_{\mathrm{R}} = 1013{,}2\ \mathrm{let};\ \theta_{\mathrm{L}} = 2525{,}9\ \mathrm{leta};\ \theta_{\mathrm{K}} = 87{,}4\ \mathrm{let};\ \theta_{\mathrm{RŠ}} = 1043{,}1\ \mathrm{leta};$
4. $R_{\mathrm{MP}} = 0{,}992488\ ;\ R_{\mathrm{TD}} = 0{,}998541\ ;\ R_{\mathrm{N}} = 0{,}998411\ ;\ MTTF_{\mathrm{MP}} = 265251{,}98\ \mathrm{h}\ ;\ MTTF_{\mathrm{TD}} = 684931{,}51\ \mathrm{h};\ MTTF_{\mathrm{N}} = 1257861{,}61\ \mathrm{h}$

7 Razvoj in izdelava

7.1 Odločitev »izdelaj ali kupi« (*angl. »Make or Buy«)*

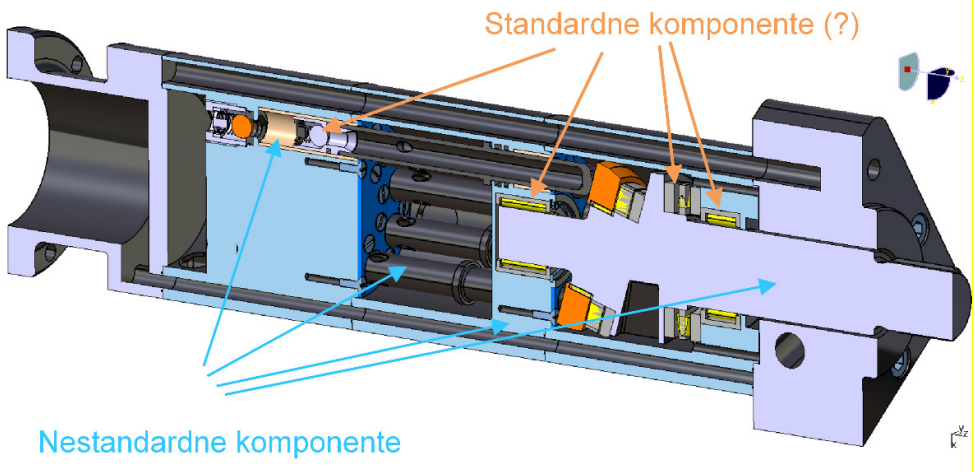
Moderni izdelki so postali zelo kompleksni. Osebni avtomobil, na primer, je sestavljen že iz več kot 30.000 komponent, ima napredne in kompleksne mehanske sisteme, kopico električnih in elektronskih sistemov ter tudi komponent, ki izboljšujejo vozniško izkušnjo in udobje. Proizvajalcem se zato še toliko večkrat zastavi vprašanje ali posamezno komponento razviti in izdelati (*angl.* »make) ali enostavno to prepustiti drugim in jo kupiti (*angl.* »*buy*«). Kriterijev, ki odločajo, je več: cena, lastne proizvodne kapacitete, strategija podjetja, različna tveganja, logistika, zaščita intelektualne lastnine ipd.



Slika 36: Na komponente razstavljeni starejši tip osebnega vozila. Vir Slike [15].

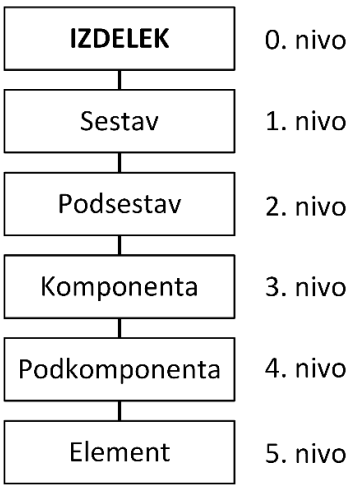
Do enakih vprašanj pridemo tudi pri izdelavi prototipa. Pri tem je navadno v ospredju najprej funkcionalnost in razpoložljivost standardnih delov, šele potem cena.

Prototip črpalke ima razmeroma malo komponent. Ker so te razvite za namen, jih v večini ni mogoče nadomestiti s standardnimi komponentami. Ker v laboratoriju ne razpolagamo s primerno izdelovalno in obdelovalno opremo, smo večino komponent, ki smo jih razvili in pripravili tehnično dokumentacijo sami, dali v izdelavo zunanjim kooperantom. Model črpalke z vidnimi komponentami v prerezu je prikazan na Sliki 37.



Slika 37: Odločitev o izdelavi komponent prototipa črpalke.

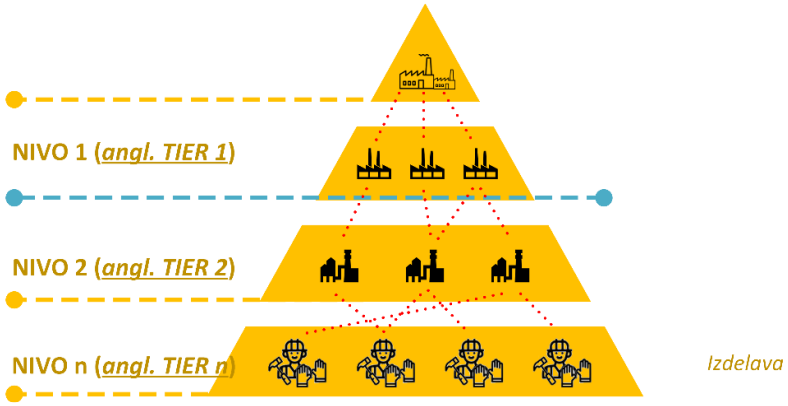
Pri odločitvi »izdelaj ali kupi« si lahko pomagamo s hierarhično delitvijo izdelka na 5 »velikostnih« nivojev, kot prikazuje Slika 38.



Slika 38: »Velikostni« nivoji izdelka.

Proizvajalec (*angl. OEM: original equipment manufacturer*) lahko razvije in izdela celoten izdelek, lahko pa si pri tem pomaga s podizvajalci. Če se odloči za zunanjo pomoč, tudi to lahko razdelimo na nivoje vezane na nivo sodelovanja podizvajalca pri dobavi oz. večnivojska dobavna veriga (*angl. »Multi-Tier Supply chain«*).

Nivo 1 (*angl. Tier 1*) je najvišji nivo podizvajalca, saj poleg razvoja in izdelave izvaja tudi raziskave. Nižjim nivojem *OEM* in nivojem 1 prepuščata razvoj in izdelavo, še nižjim samo izdelavo. Navadno *OEM* nima neposrednega dostopa do najnižjih nivojev.



Slika 39: Večnivojska dobavna veriga. Povzeto po [16].

Pri izdelavi prototipa smo nekaj standardnih delov (izbrani kotalni ležaji, O-ring tesnila in kroglice protipovratnih ventilov) kupili. Ležaji in dinamična tesnila so zelo zahtevni strojni elementi, ki jih je bilo treba namensko prilagoditi prototipu. To smo prepustili uveljavljenim proizvajalcem ležajev in tesnil, ki so na osnovi danih obratovalnih pogojev in vgradnih dimenzij sami oblikovali in izdelali primerne komponente. Ker komponente samo vgrajujemo (*OEM*), bi dobavitelje lahko uvrstili v nivo 1. Preostale nestandardne komponente (ohišja, gredi, batki, puše) smo zaupali v izdelavo podizvajalcu, raziskave in razvoj pa smo v večini opravili sami. Tudi ta podizvajalec bi lahko umestili v nivo 1, saj komunikacije z njegovimi podizvajalci nismo imeli. Iz tega sledi, da je tovrstni sistem (Slika 38) mogoče interpretirati tudi glede na nivoje pridobivanja virov in potek procesov, ki so potrebni za izdelavo in dobavo *OEM*-u.

Če odločitev o izdelavi ali nakupu ni popolnoma jasna, si pri tem lahko pomagamo s kvalitativnimi smernicami, danimi na Sliki 40.

Smernice in ključni razmisleki o "naredi"

- Skrb glede stroškov (kadar je zunanje izvajanje drago)
- Želja po povečanju osredotočenosti na proizvodnjo
- Pomisleki glede intelektualne lastnine
- Pomisleki glede kakovosti
- Nezanesljivi dobavitelji
- Potreba po neposrednem nadzoru kakovosti izdelka
- Čustveni razlogi (na primer ponos)
- Odsotnost/pomanjkanje kompetentnih dobaviteljev
- Premajhne količine za bodoče dobavitelje
- Zmanjšanje stroškov pošiljanja in prevoza
- Za vzdrževanje rezervnega vira
- Naravovarstveni razlogi
- Politični razlogi

Smernice in ključni razmisleki o "kupi"

- Pomanjkanje strokovnega znanja
- Raziskave in specializirano znanje in izkušnje dobavitelja boljši od kupca
- Upoštevanje stroškov (nakup je cenejši)
- Nezadostna ali odsotna proizvodna zmogljivost na strani kupca
- »De-Risking« virov (pojav finančnih institucij, ki prenehajo ali omejujejo poslovanje s strankami ali kategorijami strank, da bi se izognili, namesto da bi obvladali tveganje)
- Zahteve po majhni proizvodnji količini
- Dobavitelj je bolj opremljen kot kupec
- Nabava – nabava in popis zalog
- Izdelek ali storitev ni bistvena za strategijo podjetja
- Prednost blagovne znamke

Slika 40: Kvalitativne smernice pri odločitvi »naredi ali kupi«. Povzeto po [17].

7.2 Teoretične osnove za statične modele zanesljivosti

V nekaterih primerih zanesljivost izdelka ni v funkciji časa uporabe, ampak je funkcija neke druge naključne spremenljivke, ki na izdelek deluje kratek čas. Odpoved izdelka je tako posledica trenutnih obremenitev in ne predhodne zgodovine. Tak primer je kombinacija nosilnosti (zdržljivosti) podvozja letala in obremenitve na podvozje ob pristanku.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:N201UU_US_Airways_(4493174629).jpg


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%9Cberlauf_Edertalsperre_vom_Uhrenkopf.jpg

Slika 41: Statični modeli zanesljivosti – primera. Vira slik [18,19].

Za popis obremenitev in nosilnosti vpeljemo naključni spremenljivki X in Y. Naključna spremenljivka X (uporabimo za popis obremenitve) ima gostoto porazdelitve verjetnosti $f_x(x)$, naključna spremenljivka Y (uporabimo za popis nosilnosti) pa gostoto porazdelitve verjetnosti $f_y(y)$. Zapišimo enačbo za izračun verjetnosti, da obremenitev X ne preseže izbrane fiksne vrednosti x:

$$Pr\{X \leq x\} = F_x(x) = \int_0^x f_x(x)\, dx \qquad (100)$$

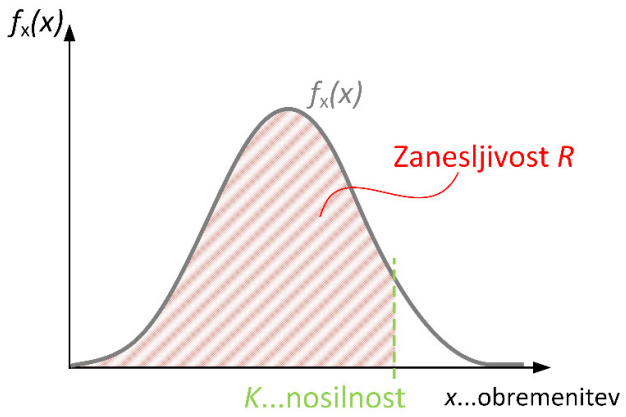
Zapišimo še enačbo za izračun verjetnosti, da nosilnost ne preseže izbrane fiksne vrednosti y:

$$Pr\{Y \leq y\} = F_y(y) = \int_0^y f_y(y)\, dy \qquad (101)$$

Tako obremenitev kot tudi nosilnost navadno nista konstanti, temveč imata vsak svojo gostoto porazdelitve verjetnosti. Do izraza za izračun statične zanesljivosti (npr. obremenitev in nosilnost imata vsak svojo gostoto porazdelitve verjetnosti) pridemo z razmislekom, ki vključuje dve situaciji, in sicer a) naključna obremenitev in konstantna nosilnost in b) konstantna obremenitev in naključna nosilnost. Najprej zato predstavimo slednji dve in nato še primer z naključno obremenitvijo in nosilnostjo.

7.2.1 Naključna obremenitev in konstantna nosilnost

Izdelek bo deloval, kadar obremenitev ne bo presegla fiksno določene nosilnosti in ga uničila. Statično zanesljivost zato izračunamo kot verjetnost, da obremenitev ne preseže nosilnosti K, pri čemer moramo nosilnost K pretvoriti v ustrezni ekvivalent maksimalne dovoljene sile (*kompatibilnost fizikalnih veličin*).

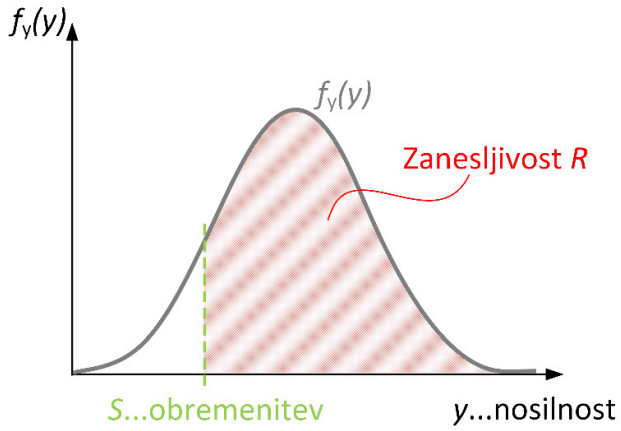


Slika 42: Statični modeli zanesljivosti – naključna obremenitev in konstantna nosilnost.

$$R = Pr\{X \leq K\} = \int_0^K f_x(x)\, dx \qquad (102)$$

7.2.2 Konstantna obremenitev in naključna nosilnost

Izdelek bo deloval, kadar nosilnost presega fiksno določeno obremenitev S. Statično zanesljivost zato izračunamo kot verjetnost, da nosilnost preseže S. Za izračun moramo obremenitev S pretvoriti v ustrezni ekvivalent minimalne potrebne nosilnosti (*kompatibilnost fizikalnih veličin*).

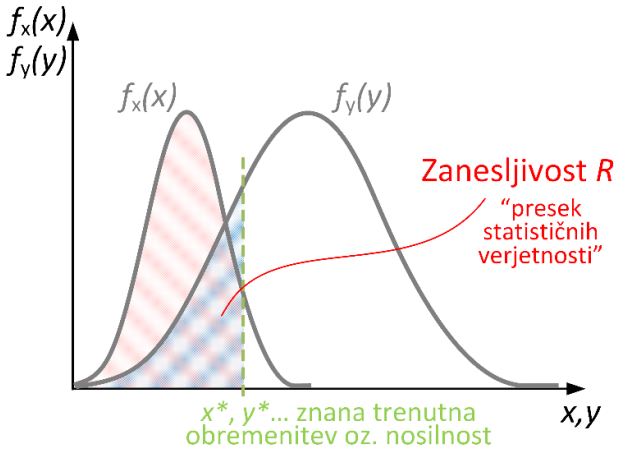


Slika 43: Statični modeli zanesljivosti – konstantna obremenitev in naključna nosilnost.

$$R = Pr\{Y \geq S\} = \int_S^{\infty} f_y(y)\, dy \qquad (103)$$

7.2.3 Naključna obremenitev in naključna nosilnost

V tem primeru sta mogoči obe prejšnji kombinaciji, pri čemer sta tako obremenitev kot nosilnost naključni spremenljivki. Statična zanesljivost je zato enaka statističnemu »preseku« dveh gostot porazdelitev verjetnosti. Opomba: omenjeni presek zaradi primerjanja statističnih verjetnosti ne ustreza geometrijskemu preseku površin!



Slika 44: Statični modeli zanesljivosti – naključna obremenitev in naključna nosilnost.

$$R = Pr\{X \leq Y\} = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{y} f_x(x)\, dx\right] \cdot f_y(y)\, dy \qquad (104)$$

Oziroma ekvivalentna enačba z zamenjanim vrstnim redom integriranja

$$R = Pr\{X \leq Y\} = \int_0^{\infty} \left[\int_x^{\infty} f_y(y)\, dy\right] \cdot f_x(x)\, dx \qquad (105)$$

Če sta gostoti porazdelitve verjetnosti eni izmed štirih osnovnih funkcij: eksponentna, normalna, lognormalna ali Weibullova, potem lahko namesto vsakokratnega reševanja integralov uporabimo kar končne rešitve dvojnih integralov. Formule za izračun statične zanesljivosti za različne[7] funkcije gostote porazdelitve verjetnosti so podane v Tabeli 4.

[7] V paru morata biti enaki funkciji gostote porazdelitve verjetnosti

Tabela 4: Formule za izračun statične zanesljivosti za različne funkcije gostote porazdelitve verjetnosti.

Porazdelitev	Konstantna nosilnost	Konstantna obremenitev	Naključna nosilnost in obremenitev
Eksponentna	$R = 1 - \exp\left[-\frac{K}{\mu_{\mathrm{x}}}\right]$	$R = \exp\left[-\frac{S}{\mu_{\mathrm{y}}}\right]$	$R = \frac{\mu_{\mathrm{y}}}{\mu_{\mathrm{x}} + \mu_{\mathrm{y}}}$
Normalna	$R = \Phi\left(\frac{K - \mu_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)$	$R = 1 - \Phi\left(\frac{S - \mu_{\mathrm{y}}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)$	$R = \Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{y}} - \mu_{\mathrm{x}}}{\sqrt{\sigma_{\mathrm{x}}^2 + \sigma_{\mathrm{y}}^2}}\right)$
Lognormalna	$R = \Phi\left(\frac{1}{s_{\mathrm{x}}} ln\left(\frac{K}{m_{\mathrm{x}}}\right)\right)$	$R = 1 - \Phi\left(\frac{1}{s_{\mathrm{y}}} ln\left(\frac{S}{m_{\mathrm{y}}}\right)\right)$	$R = \Phi\left(\frac{ln\left(\frac{m_{\mathrm{y}}}{m_{\mathrm{x}}}\right)}{\sqrt{s_{\mathrm{x}}^2 + s_{\mathrm{y}}^2}}\right)$
Weibullova	$R = 1 - \exp\left[-\left(\frac{K}{\theta_{\mathrm{x}}}\right)^{\beta_{\mathrm{x}}}\right]$	$R = \exp\left[-\left(\frac{S}{\theta_{\mathrm{y}}}\right)^{\beta_{\mathrm{y}}}\right]$	Numerično

<u>Računski primer</u>

Obremenitev na mehanski vzvod je naključno porazdeljena z znano gostoto porazdelitve verjetnosti, ki je eksponentna s povprečno vrednostjo $\mu_{\mathrm{x}} = 150\ \mathrm{N}$. Tudi nosilnost vzvoda je naključno porazdeljena z znano gostoto porazdelitve verjetnosti, ki je prav tako eksponentna s povprečno vrednostjo $\mu_{\mathrm{y}} = 350\ \mathrm{N}$. Velja omeniti, da morata biti enoti usklajeni! V danem primeru smo nosilnost, ki jo v mehaniki klasično definiramo z mehansko napetostjo po prerezu, pretvorili v ustrezni ekvivalent obremenitve. Kolikšna je statična zanesljivost takega sistema?

Odgovor)

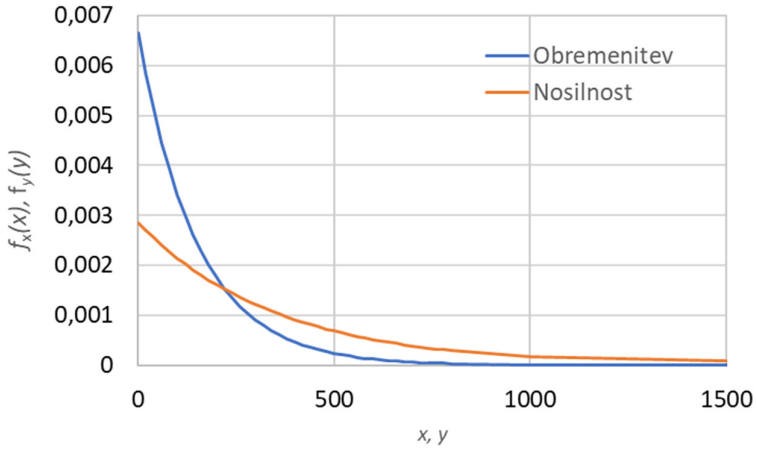
Najprej zapišimo obe funkciji gostote porazdelitve verjetnosti. Za obremenitev:

$$f_x(x) = \lambda_x \cdot e^{-\lambda_x \cdot x} = \frac{1}{\mu_x} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_x} \cdot x} \qquad (106)$$

in za nosilnost:

$$f_y(y) = \lambda_y \cdot e^{-\lambda_y \cdot y} = \frac{1}{\mu_y} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_y} \cdot y} \qquad (107)$$

Izrisani funkciji sta prikazani na Sliki 45.



Slika 45: Funkcija obremenitve in nosilnosti.

Sledimo enačbi 69 in izračunajmo statično zanesljivost obremenjenega mehanskega vzvoda.

$$R = \int_0^\infty \left[\int_0^y \frac{1}{\mu_x} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_x} x}\, dx\right] \cdot \frac{1}{\mu_y} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_y} y} dy = \int_0^\infty \left[1 - e^{-\frac{1}{\mu_x} y}\right] \cdot \frac{1}{\mu_y} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_y} y}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\mu_y} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_y} y}\, dy - \int_0^\infty \frac{1}{\mu_y} \cdot e^{-y\left(\frac{1}{\mu_x}+\frac{1}{\mu_y}\right)} dy = 1 - \frac{1}{\mu_y} \cdot \frac{e^{\left[-y\left(\frac{1}{\mu_x}+\frac{1}{\mu_y}\right)\right]}}{-\left(\frac{1}{\mu_x}+\frac{1}{\mu_y}\right)} \Big|_0^\infty$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_y}\left(\frac{1}{\mu_x} + \frac{1}{\mu_y}\right) = 1 - \frac{\mu_x}{\mu_x+\mu_y} = \frac{\mu_y}{\mu_x+\mu_y} \qquad (108)$$

Ugotovimo, da je to isti izraz, kot zapisano v Tabeli 4. Vstavimo vrednosti.

$$R = \frac{\mu_y}{\mu_x+\mu_y} = \frac{350\ N}{150\ N+350\ N} = 0{,}7 \qquad (109)$$

7.2.4 Računske naloge

1. Komponenta ima konstantno nosilnost $1000\ \mathrm{MPa}$. Izračunajte statično zanesljivost, če nanjo delujejo naslednje obremenitve:

   (a) Eksponentna porazdelitev obremenitve s srednjo vrednostjo $500\ \mathrm{MPa}$.

   (b) Normalna porazdelitev obremenitve s srednjo vrednostjo $500\ \mathrm{MPa}$ in standardno deviacijo $5\ \mathrm{MPa}$.

2. Konstantna obremenitev $250\ \mathrm{N}$ deluje na nosilec, ki ima dokazane nosilnosti:

   (a) Eksponentna porazdelitev nosilnosti s srednjo vrednostjo $2600\ \mathrm{N}$.

   (b) Weibullova porazdelitev nosilnosti s parametrom velikosti $2600\ \mathrm{N}$ in parametrom oblike $0{,}8$.

   Izračunajte pripadajoči statični zanesljivosti.

3. Obremenitev ima eksponentno porazdelitev s srednjo vrednostjo $25\ \mathrm{N}$. Nosilnost ima eksponentno porazdelitev. Izračunajte minimalno srednjo vrednost nosilnosti, da bo zanesljivost $0{,}95$.

4. Izračunajte statično zanesljivost sistema za podani funkciji obremenitve in nosilnosti:

   Obremenitev: $f_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{2}$; za $15 \leq x \leq 17\ \mathrm{N}$

   Nosilnost: $f_{\mathrm{y}}(y) = 0{,}08 \cdot (y - 15)$; za $15 \leq y \leq 20\ \mathrm{N}$

5. Betonska konstrukcija je konstruirana, da prenese 464 ton obremenitve. Njena gostota porazdelitve verjetnosti nosilnosti je podana s funkcijo:

   $f_{\mathrm{y}}(y) = \frac{3 \cdot y^2}{10^9}$; za $0 \leq y \leq 1000\ \mathrm{ton}$

   (a) Izračunajte statično zanesljivost.

   (b) Izračunajte zanesljivost, če je obremenitev naključna in podana z gostoto:

   $f_{\mathrm{x}}(x) = 2 \cdot (0{,}001 - 0{,}000001 \cdot x)$; za $0 \leq x \leq 1000\ \mathrm{ton}$

Rešitve:

1. $R_{\mathrm{a}} = 0{,}86466;\ R_{\mathrm{b}} = 0{,}99878$
2. $R_{\mathrm{a}} = 0{,}90832;\ R_{\mathrm{b}} = 0{,}85762$
3. $\mu_y = 475\ \mathrm{N}$
4. $R = 0{,}946$
5. $R_{\mathrm{a}} = 0{,}9;\ R_{\mathrm{b}} = 0{,}9$

8 Validacija izdelka

8.1 Analiza možnih okvar in njihovih posledic (FMEA)

Analiza možnih okvar in njihovih posledic ali *FMEA* (*angl. Failure Modes and Effects Analysis*) je iterativni vodeni proces (ad-hoc) odkrivanja potencialnih okvar komponent, njihovih vzrokov in učinkov na funkcionalnost izdelka. Vključuje tudi korake preprečevanja morebitnih okvar in motenj procesa. Cilj analize je povečevanje zanesljivosti in varnosti izdelka in uporabnika. Metoda temelji na kvalitativnem ocenjevanju. Nivo ocene je odvisen od razvojne faze izdelka. V zgodnjih fazah je informacij malo, zato bo analiza najverjetneje omejena na podsisteme, ki se z razvojem definirajo do nivoja komponent in elementov. Analizo možnih okvar lahko izvedemo preko funkcijske strukture (po funkciji) ali dejanske konfiguracije strojne opreme (po komponentah). Pri prvi analiziramo od zgoraj navzdol (*angl. top-down*), pri drugi pa od spodaj navzgor (*angl. bottom-up*).

Kdaj je čas za analizo?

- Ko načrtujemo nov izdelek, postopek ali storitev (preliminarne analize).
- Ko nameravamo obstoječ proces izvesti na drugačen način.
- Ko imamo cilj izboljšanja kakovosti za določen izdelek/proces.
- Ko moramo razumeti in izboljšati napake izdelka/v procesu.

Poleg tega je priporočljivo občasno izvajati *FMEA* skozi celotno življenjsko dobo izdelka. Če je cilj optimalni rezultat, je nujno tudi nenehno in dosledno preverjanje kakovosti in zanesljivosti.

FMEA analiza zahteva primerno pripravo in formiranje ad-hoc skupine. Pri tem je pomembno, da v skupino vključimo kadre z različnih področij, ki s svojim znanjem nalogo opravijo temeljitejše in s širšim vpogledom na izdelek ali proces. Po formiranju skupine in pred analizo se natančno določijo odgovornosti skupine za izvedbo analize, pripravo predlogov in/ali tudi poskrbijo za izvedbo izboljšav, s kolikšnimi in katerimi sredstvi razpolaga skupina, termin za izvedbo analize in druge časovne omejitve, postopke, če mora skupina prekoračiti omejitve, poročevalca in način poročanja itd.

Analiza vključuje deset ključnih korakov, na osnovi katerih se lahko poda ocena izdelka oz. procesa.

Ključni koraki:

1. Pregled procesa
2. Identifikacija potencialnih vrst okvar
3. Identifikacija potencialnih učinkov okvar
4. Ocena stopnje resnosti (**S**) potencialnih učinkov okvar (*angl. Severity*)
5. Ocena verjetnosti realizacije (**O**) potencialnih vrst okvar (*angl. Occurrence*)
6. Ocena verjetnosti odkrivanja (**D**) potencialnih vrst in/ali učinkov okvar (*angl. Detection*)
7. Izračun indeksa kritičnosti potencialnih učinkov okvar **RPN** (*angl. Risk priority number*)
8. Določitev kritičnih potencialnih vrst okvar
9. Izvedba korektivnih ukrepov
10. Ponovni izračun indekse kritičnosti potencialnih okvar

Komponente, podsistemi ali sistemi odpovedo (vrsta okvare) zaradi najrazličnejših dejavnikov (vzrok ali mehanizem okvare) – enega prevladujočega ali vzajemno delujočih več dejavnikov. Mednje sodijo mehanska preobremenitev, mehanske vibracije, utrujanje materiala, pojavi, vezani na trenje, obrabo in korozijo, temperaturne obremenitve in nihanja, onesnaženje z različnimi snovmi ipd. Med vzroke pa lahko prištejemo tudi napake pri izdelavi in slabo kontrolo kakovosti ter človeško napako. V splošnem in za poenostavitev analize lahko dejavnike razdelimo v štiri skupine glede na njihov fizikalni izvor: mehanski, toplotni, kemični in električni.

Ocena potencialnih učinkov okvar na delovanje komponente, podsistema ali sistema je zelo pomembna. S to oceno določimo, če prepoznana vrsta okvare vodi do popolnega ali delnega zmanjšanja funkcionalnosti. To je tudi osnova za kvalitativno oceno resnosti okvare.

Ocena stopnje resnosti *S*

Stopnja resnosti *S* je številčna vrednost med 1 in 10, in jo določimo za vsako prepoznano potencialno vrsto okvare. Vrednost je odvisna od učinka okvare na uporabnika in okolico. Najnižja ocena (1) resnosti pomeni, da odpoved ali zmanjšanje funkcionalnosti komponente ne vodi do odpovedi sistema ali povzroči resnejše posledice za uporabnika ali okolje. Najvišja ocena (10) pomeni, da je odpoved komponente kritična za delovanje sistema kot tudi varnost uporabnika. Podrobnejši opis ocen je podan na Sliki 46.

Ocena verjetnosti realizacije *O*

Verjetnost realizacije potencialnih vrst okvar *O* je številčna vrednost med 1 in 10, ki podaja verjetnost, da se bosta določena vrsta ali mehanizem okvare pojavila v življenjskem ciklu izdelka ali procesa. Ocena lahko temelji na statističnih podatkih in bazah, preteklih izkušnjah ali v primerjavi s podobnimi komponentami z znanimi zanesljivostmi. Če nič od tega ni znano, oceno lahko okvirno določimo na osnovi predvidene intenzivnosti okvar, kot prikazuje Slika 46.

Ocena verjetnosti odkrivanja *D*

Verjetnost odkrivanja *D* je številčna vrednost med 1 in 10, ki podaja verjetnost odkrivanja vrst ali učinkov okvar. Okvare, ki jih ni mogoče odkriti, predstavljajo največjo težavo za varno uporabo izdelka. Ocene verjetnosti odkrivanja kvalitativno določimo na osnovi opisa na Sliki 46.

	stopnja resnosti S		verjetnost realizacije O		verjetnost
ocena	opis	definicija	opis	frekvenca	odkrivanja D
10	ekstremna brez opozorila	okvara lahko privede do poškodbe uporabnika brez opozorila	zelo visoka: okvara skoraj	≥ 100 na tisoč	skoraj nična
9	ekstremna z opozorilom	okvara povzroči neskladje z uradnimi predpisi z opozorilom	neizogibna	50 na tisoč	zelo neznatna
8	zelo visoka	izdelek je pokvarjen in izgubi svojo prvotno funkcijo	visoka: ponavljajoča	20 na tisoč	neznatna
7	visoka	okvara povzroči visoko stopnjo nezadovoljstva pri uporabniku	se okvara	10 na tisoč	zelo majhna
6	srednja	okvara poslabša delovanje sestava ali komponente	srednja: občasna	5 na tisoč	majhna
5	majhna	okvara povzroči tolikšno izgubo performans, da se uporabnik pritožuje	okvara	2 na tisoč	srednja
4	zelo majhna	okvaro je mogoče preseči s prilagajanjem uporabnika izdelku ali procesu, vpliv na performanse je neznaten		1 na tisoč	srednje visoka
3	neznatna	okvara predstavlja neznatno motnjo za uporabnika, vpliva na performanse izdelka ali procesa ni	nizka: sorazmerno	0.5 na tisoč	visoka
2	zelo neznatna	okvara ni takoj očitna in ima le neznaten učinek na izdelek ali proces	redka okvara	0.1 na tisoč	zelo visoka
1	skoraj nična	učinek okvare ni opazen	neznatna:	≤ 0.01 na tisoč	skoraj 100%

Slika 46: Kvalitativni opisi za določitev stopenj resnosti S, verjetnosti realizacije O in verjetnosti odkrivanja D [20].

Izračun indeksa kritičnosti potencialnih učinkov okvar RPN

Indeks kritičnosti okvar je skalarna vrednost, ki jo izračunamo kot produkt ocenjenih vrednosti stopnje resnosti, verjetnosti realizacije in verjetnosti odkrivanja. Produkt ima zalogo vrednosti med 1 in 1000. Tipična vrednost indeksa za potrošniške izdelke je med 300 in 500. Ker imajo člani skupine različne izkušnje, znanja in poglede, se o posameznih ocenah navadno dogovorijo ali glasujejo, vključijo dodatne eksperte, podaljšajo razpravo ipd.

$$RPN = S \cdot O \cdot D \quad ; 1 \leq RPN \leq 1000 \tag{110}$$

Po izračunu RPN indeksa se, predvsem za primere z visoko vrednostjo indeksa, določijo potrebni korektivni ukrepi, odgovorne osebe za izvedbo in za to predvideni časovni okvir. Med ukrepi so zamenjava ali izboljšanje materiala, izboljšanje varnosti z uporabo zaščitnih sredstev in varnostnih sistemov, povečanje kontrole vhodnih količin in kontrole med in ob koncu proizvodnje linije. Kot zadnje, se ponovno oceni S, O in D ter ovrednoti napredek (RPN^*) v smeri boljše in zanesljivejše komponente, izdelka, podsistema ali sistema $RPN^* < RPN$. Primer *FMEA*-analize cevi gasilnega avtomata je prikazana na Sliki 47.

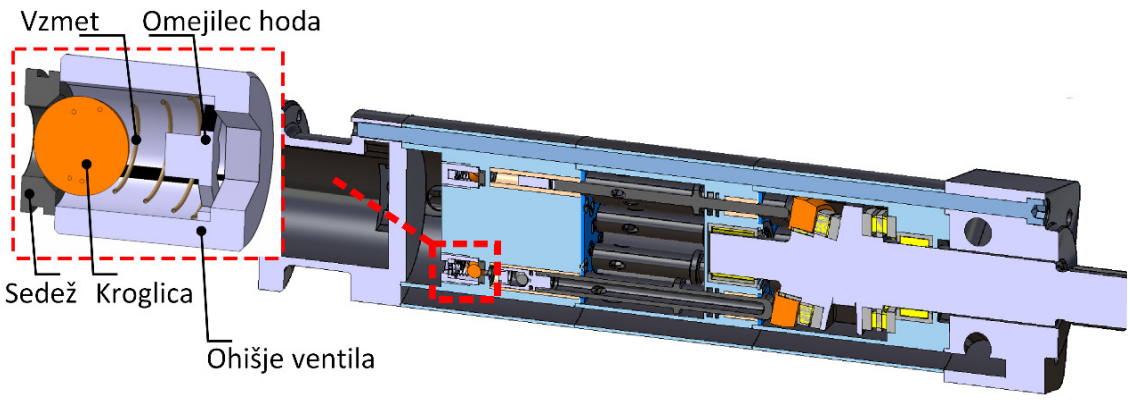
Predmet (izdelek/proces): gasilni aparat X-1050 — Številka FMEA: 019
FMEA skupina: gasilni aparat X-1050 FMEA skupina — Datum (priprava): 05.03.02 (pregled): 01.05.02
Vodja skupine: Martin M. — Stran: 1 od 2

predmet in funkcija	potencialna vrsta okvare	potencialni učinek okvare	S	C	potencialni vzrok/mehanizem okvare	O	način kontrole: preprečevanje	način kontrole: detekcija	D	RPN	korektivni ukrep	odgovornost in rok za izvedbo	izveden ukrep	S	O	D	RPN
cev	razpoke	ob aktiviranju se ne sproži	10		izpostavljenost visoki vročini ali mrazu med transportom	5	- uporaba izolacijskih materialov za pakiranje - transport pri klimatsko kontroliranih pogojih		6	300	uporaba cevi iz materiala, ki ni občutljiv na temperaturo	Martin M. 01.04.02	zamenjava obstoječe cevi s cevjo iz materiala, ki ni občutljiv na temperaturo	10	2	6	120
	luknjice	nizek iztisni tlak	8		poškodba cevi med proizvodnjo	8	- prepoved uporabe ostrih predmetov med proizvodnjo		4	256	zaščita cevi s prevleko iz kevlarja	Marta L. 15.04.02	nakup zaščitne prevleke za cev	8	5	4	160
	zamašitev	ni iztiskanja	10		tujek v cevi	6		- vhodna kontrola - test cevi s komprimiranim zrakom	3	180				10	6	3	180
jeklenka	---------																
mehanizem ventila	---------																
indikator polnosti																	

Slika 47: Primer rešene tabele po opravljeni analizi FMEA [20].

Računski primer

Bolj kot je izdelek kompleksen, bolj podrobna je *FMEA*-analiza. Razvita črpalka ima veliko komponent, ki so poleg dinamičnih mehanskih in toplotnih dejavnikov, izpostavljene tudi močnim obrabnim in korozivnim dejavnikom. Prikaz *FMEA* za vse komponente na tem mestu ni izvedljiv, lahko pa prikažemo nastavek analize na primeru manjšega podsistema – protipovratni ventil.



Slika 48: Analizirani protipovratni ventil s sestavnimi deli.

Protipovratni ventil preprečuje povratni tok, ki je za ventilov pod zelo visokim tlakom (ekvivalentno vodnemu stolpcu višine 3000 m). Protipovratni ventili so tudi v nenehnem in neposrednem stiku s črpanim fluidom. Hitrost odpiranje ventila je odvisno od frekvence vrtenja gredi z bati, medtem ko se ventil samodejno zapre ob tlačni spremembi in pomoči vzmeti (prepočasno zapiranje pomeni delno izgubo pretoka oz. lekažo, ki pa ni kritična za funkcionalnost črpalke). Pravilno delovanje protipovratnih ventilov (9 kosov) je zato ključno za predvideno delovanje črpalke, saj bi odpoved katerega izmed njih med drugim povzročilo odpoved dinamičnih tesnil ter prekinila pretok v smeri površine.

Glede na opis sestavnih delov in pogojev obratovanja lahko predvidimo naslednje vrste okvar: zlom vzmeti, poškodba sedeža, poškodba kroglice, poškodba omejilca hoda ali lom ohišja ventila. Analizo bomo naredili samo za vzmet, ki je hkrati tudi najbolj dinamično obremenjena komponenta.

Potencialni učinek okvare vzmeti je znan, in sicer zmanjšanje učinkovitosti črpanja ali celo tlačni udar. S pomočjo tabele na Sliki 46 ocenimo, da je učinek okvare (S) povzroči opazno izgubo črpalne zmogljivosti -> ocena 5.

Določimo še potencialni vzrok okvare. Vzmet je zaradi velike frekvence vrtenja gredi in posledično velikemu številu ciklov odpiranja/zapiranja ventila, obremenjena dinamično. Poleg tega je v nenehnem stiku s črpanim fluidom, ki je lahko umazan, in zaradi najrazličnejših spojin tudi koroziven. Zaradi omejenega vgradnega prostora je premer žice vzmeti sorazmerno majhen in zato zelo obremenjen (mehanska napetost po prerezu). Glavni vzrok za odpoved je tako mehanska preobremenitev (utrujanje), ki ga pospešuje korozivno okolje. Ker gre za

prototip, ocene verjetnost realizacije okvare (O) ne moremo oceniti na osnovi baze preizkusov, lahko pa jo precej dobro ocenimo na osnovi preračuna vzmeti -> ocena 4.

Neposredno zaznavanje in odkrivanje odpovedi ni mogoča, posredno to opazimo preko zmanjšanja osnovne funkcije črpalke. Zato je ocena (D) zelo visoka -> ocena 10. Sledi izračun RPN indeksa: $RPN = 5 \cdot 4 \cdot 10 = 200$.

Med korekturne ukrepe bi lahko navedli zamenjavo materiala (korozivno odpornejši material s primerno površinsko obdelavo) ali namenu prilagojena oblika vzmeti za zmanjšanje mehanske obremenitve (optimizacija). Ob predpostavki, da zamenjamo material in izvedemo optimizacijo oblike, lahko ponovno ovrednotimo S, O in D. V danem primeru se lahko z izboljšavo materiala in oblike vzmeti za malenkost zmanjša le vrednost potencialnega vzroka za odpoved (O) -> ocena 3. Nova vrednost $RPN^* = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 150$, ki je manjša od prvotne vrednosti (RPN).

												PONOVNA OCENA			
Predmet/proces in funkcija	**Potencialna vrsta okvar**	**Potencialni učinki okvare**	**S**	**Potencialni vzrok/mehanizem okvare**	**O**	**Način kontrole**		**D**	**RPN**	**Korektivni ukrep**	**Odgovornost in rok za izvedno**	**Izveden ukrep**	**S**	**O**	**D**	**RPN***
						preprečevanje	**detekcija**									
protipovratni ventil (prepreči povratni tok nafte)	lom vzmeti	ventil ne zapira hitro (zmanjšana učinkovitost, tlačni udar)	5	preobremenitev utrujanje materiala	4	- material - dizajn	ni mogoča	10	200	analiza in optimiranje oblike; zamenjava materiala	AG; 15.1.2025	optimizirana oblika, uporaba vzdržljivejšega materiala	5	3	10	150
	poškodba sedeža	...														
	poškodba kroglice	...														
	poškodba omejilca hoda	...														
	lom ohišja ventila	...														
...																

Slika 49: FMEA – izpolnjena tabela za primer loma vzmeti.

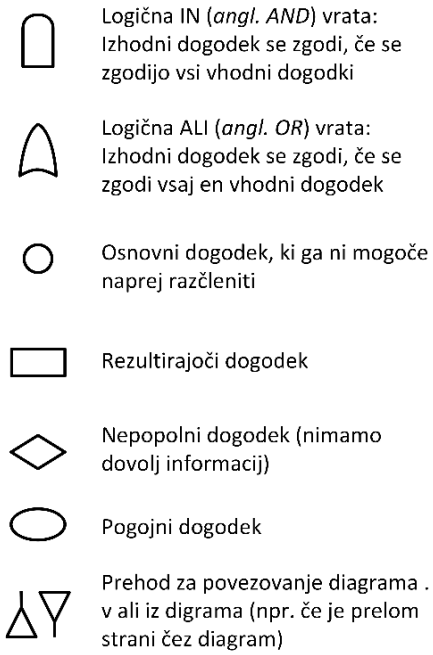
8.2 Analiza varnosti in drevesa okvar (FTA)

Analiza varnosti in drevesa okvar ali *FTA* (*angl. Fault Tree Analysis*) je grafična metoda. Temelji na metodi sklepanja od zgoraj navzdol, kjer nas bolj kot komponente zanimajo dogodki in dogodek odpovedi (*angl. fault*) kot zanesljivost. Razlog za take predpostavke je precej preprost, saj je odpovedi lažje zaznati in tudi številčno je možnih odpovedi navadno manj, kot je možnih stanj delovanja. Glavni oz. zgornji dogodek v drevesni strukturi navadno predstavlja kritični dogodek (odpoved), ki ogrozi varnost za napravo ali uporabnika. Visoka varnost je namreč ključna, saj preprečuje poškodbe uporabnika ali naprave, poklicne bolezni ali celo smrt. Vse večji poudarek je tudi na varnosti proti škodljivim posledicam za okolje.

Za *FTA*-analizo so ključni štirje koraki:

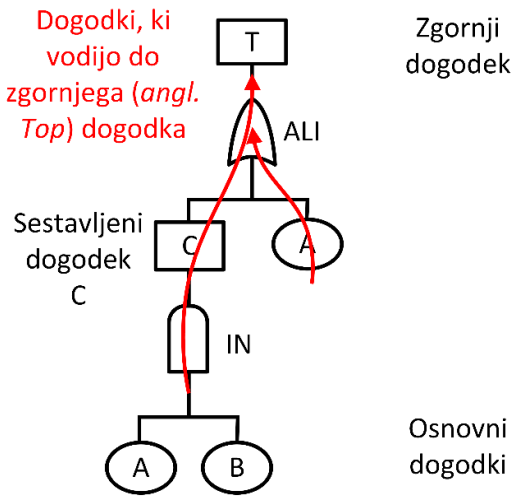
1. Določitev sistema s pripadajočimi robnimi pogoji in zgornjega (kritičnega) dogodka.
2. Določitev drevesa okvar (»kritični scenarij«).
3. Analiza kombinacij dogodkov (kvalitativno), ki vodijo do zgornjega dogodka.
4. Analiza verjetnosti (kvantitativno) zgornjega dogodka.

Drevo okvar sestavimo s simboli, kot so *AND* in *OR* logični operator, rezultirajoči dogodek in osnovni dogodek ipd. Najbolj pogosti grafični simboli so predstavljeni na Sliki 43.



Slika 50: Grafični simboli za izdelavo drevesa okvar FTA.

Primer preprostega drevesa okvar je s simboli prikazan na Sliki 51.



Slika 51: Preprosto drevo okvar FTA.

Sledi tabelarični izpis drevesa okvar in računsko vrednotenje z znanimi vrednostmi zanesljivosti po dogodkih. Iz kombinatorike zapišemo logična *ALI* vrata kot unijo (∪) dogodkov, logična *IN* vrata pa kot (∩) presek dogodkov. Tabelo začnemo z zgornjim dogodkom in potem navzdol proti zadnjemu nivoju z osnovnimi dogodki.

Prva iteracija: Zgornji dogodek se zgodi ob sestavljenem dogodku C ali osnovnem dogodku A.

$$T = C \cup A \tag{111}$$

Druga iteracija: razstavimo dogodek C

$$T = (A \cap B) \cup A \tag{112}$$

Kvalitativno oceno izvedemo po metodi minimalnih rezov, ki predstavlja množico osnovnih dogodkov, ki povzročijo zgornji dogodek T. Za prikazani primer (Slika 51) lahko hitro ugotovimo, da je minimalni rez preko dogodka A. V tem primeru se vedno zgodi tudi zgornji dogodek. Verjetnost zgornjega dogodka lahko v splošnem izpeljemo iz unije vseh minimalnih rezov:

$$T = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_i \cup \ldots \cup M_n \quad ; n = \check{s}t.\ rezov \tag{113}$$

kjer so M_i vsi rezi (pogoj *ALI*), vezani na osnovne dogodke E_i.

$$M_i = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_i \cap \ldots \cap E_k \quad ; k = \textit{število os. dogodkov v rezu} \tag{114}$$

Verjetnost[8] zgornjega dogodka T vezana na minimalne reze izračunamo z:

$$Pr\{T\} = Pr\{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_i \cup \ldots \cup M_n\} \tag{115}$$

, ki se za nepovezane dogodke poenostavi v sledeči zapis verjetnosti po minimalnem rezu[9]:

$$Pr\{T\} = Pr\{M_1\} + Pr\{M_2\} + \cdots + Pr\{M_i\} + \cdots + Pr\{M_n\} \tag{116}$$

Opomba: navadno dogodki niso medsebojno izključujoči (npr. se lahko zgodijo hkrati). Takrat je treba izraz za izračun verjetnosti prilagoditi in odšteti verjetnost preseka dogodkov:

$$Pr\{T\} = Pr\{C \cup A\} = Pr\{C\} + Pr\{A\} - Pr\{C \cap A\} \tag{117}$$

kar ob predpostavki neodvisnih dogodkov da sledeči izraz za izračun verjetnosti zgornjega dogodka:

$$Pr\{T\} = Pr\{C\} + Pr\{A\} - Pr\{C\} \cdot Pr\{A\} \tag{118}$$

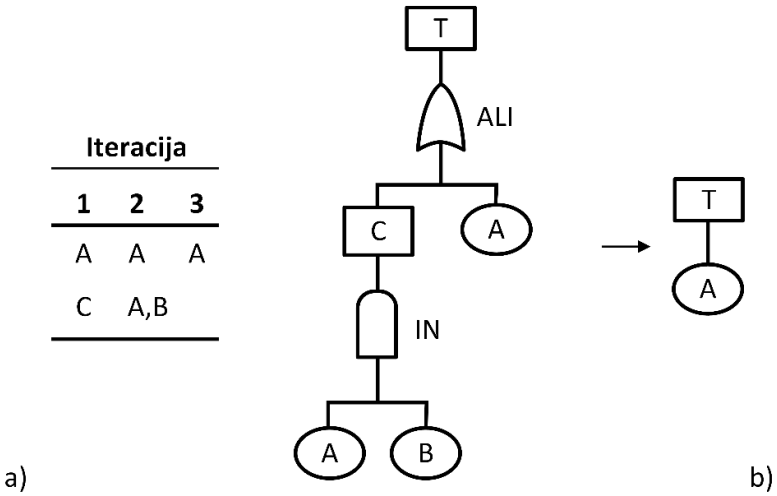
Nadaljujmo: nazadnje reze zamenjamo z osnovnimi dogodki, ki ob predpostavki statistične neodvisnosti, dajo naslednji zapis po posameznem rezu:

$$Pr\{M_1\} = Pr\{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_i \cap \ldots \cap E_k\} = Pr\{E_1\} \cdot Pr\{E_2\} \ldots Pr\{E_k\} \tag{119}$$

Za primer na Sliki 51 zapišimo tabelo z iteracijami do osnovnih dogodkov (Slika 52a) in ekvivalentno drevo okvar (Slika 52b).

[8] Opomba: predpostavimo, da so dogodki medsebojno izključujoči – se ne morejo zgoditi hkrati, kot je na primer met kocke.

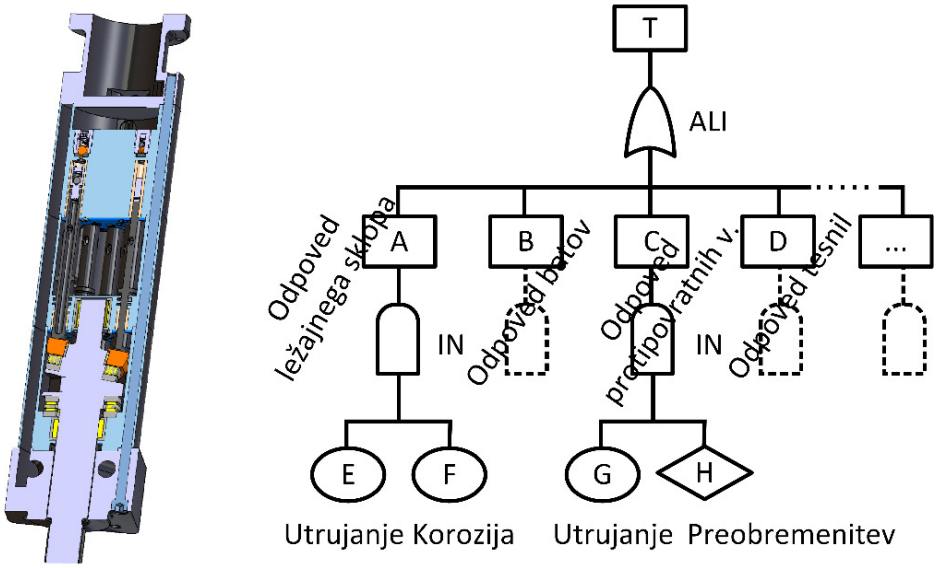
[9] Opomba: ker so verjetnosti $Pr(M_i)$ zelo majhne, je enačba (116) sprejemljiva tudi za primere s povezanimi dogodki.



Slika 52: Analiza drevesa okvar a) tabela dogodkov iz dreva okvar in b) ekvivalentno drevo okvar.

Hitro lahko ugotovimo, da se zgodnji dogodek zgodi, če se zgodi dogodek A (ker je dogodek A v obeh vejah, je to tudi minimalni rez). Verjetnost za to pa je enaka verjetnosti dogodka A.

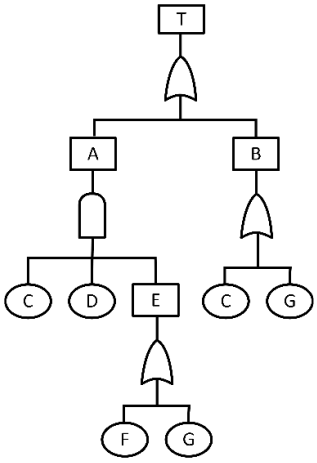
V primeru predstavljene črpalke bi zgornji dogodek predstavljal prenehanje osnovne funkcije črpalke, kar je črpanje tekočine. Ta dogodek lahko povzroči več dogodkov, ki so po večini glede na vgrajene komponente, sestavljeni dogodki. Primer je prikazan na Sliki 53.



Slika 53: Primer analiza drevesa okvar za prototip razvite aksialne batne črpalke.

8.2.1 Računske naloge

1. Za spodnje drevo okvar izračunajte verjetnost zgornjega dogodka T. Dogodki so medsebojno neodvisni in so medsebojno izključujoči. Verjetnost posameznega osnovnega dogodka je 0,005.



Slika 54: Drevo okvar.

Rešitev:

1. $Pr\{T\} = 0{,}01$

9 Vzdrževanje in reciklaža

9.1 Priprava načrta vzdrževanja

Vzdrževanje je pomembna aktivnost, ki jo je treba izvajati, ko je izdelek že v uporabi. S primernim načrtom vzdrževanja lahko upočasnimo čas do končne dotrajanosti izdelka, ko je ta primeren le še za reciklažo. Velja omeniti, da se izdelek vzdržuje in reciklira, le če to omogočata njegova zasnova in uporabljeni materiali! Veliko sodobnih naprav namreč zaradi različnih vzrokov skoraj ni več mogoče vzdrževati, zelo težka je tudi reciklaža. Glavni vzroki za prvega so na primer: kompleksna tiskana vezja, tovarniško zaprta ohišja, slaba ali odsotna servisna podpora, cena popravila je dražja od nakupa novega izdelka, za reciklažo pa na primer: tiskana vezja z elektronskimi komponentami, najrazličnejše kombinacije kompozitov, ki jih je težko razdvojiti in reciklirati, težjo razdružljive komponente ipd.



Slika 55: Vzdrževanje naprav. Viri Slik [21,22].

Razlikujemo tri nivoje vzdrževanja:

- Kurativno vzdrževanje (odpravljanje odpovedi ali poškodbe, ki se je zgodila).
- Preventivno vzdrževanje (z aktivnostmi poskušamo preprečiti odpoved ali poškodbe).
- Napovedano vzdrževanje (z aktivnostmi poskušamo preprečiti odpoved ali poškodbe).

Kurativno vzdrževanje izvajamo brez vnaprejšnjega načrta, navadno, ko pride do odpovedi naprave, komponente, podsistema, sistema itd. Nenadne odpovedi predstavljajo potencialno nevarnost za uporabnike, za podjetje pa taki dogodki lahko predstavljajo zamude pri dobavi in pomemben izpad prihodkov. Večino nenapovedanih aktivnosti lahko uspešno preprečimo s preventivnim vzdrževanjem, ki zahteva vnaprejšnjo določitev periode servisiranja. V tem času

se izvajajo aktivnosti, kot so pregledi, zamenjave in popravila, čiščenje, podmazovanje, nastavljanje, centriranje ipd. Podjetja se na tovrstne servise pripravijo vnaprej, tako z načrti proizvodnje, dobavo rezervnih delov, kot tudi zagotovitvijo ustreznih kadrov. Če je mogoče, izvajamo lahko tudi napovedano vzdrževanje, ki temelji na sprotnih meritvah in diagnostiki – opozorilo, ko je za nadzorovani izdelek, komponento, podsistem ali sistem najprimernejši čas za vzdrževalne ukrepe.

9.2 Vrednotenje na vzdrževalnost

Ustrezno in dosledno izvajanje vzdrževanja ima za posledico navadno veliko neposrednih in posrednih pozitivnih učinkov za uporabnika. Med pomembnejše sodijo ekonomski učinki, zagotavljanje varnosti, ohranjanje učinkovitosti in zmogljivosti, zadovoljstvo …

Vrednotenje na vzdrževalnost nam pomaga določiti cilje vzdrževanja: kaj, kako in kdaj se bo vzdrževalo. Kazalci vzdrževalnosti so lahko kvantitativni ali kvalitativni.

Kvantitativni kazalci:

- srednji čas popravil in standardna deviacija popravil,
- medialni čas popravil,
- maksimalni čas popravil,
- razširjeni srednji čas popravil,
- srednji čas nedelovanj,
- razmerje med številom vzdrževalnih in obratovalnih ur
- …

Kvalitativni kazalci:

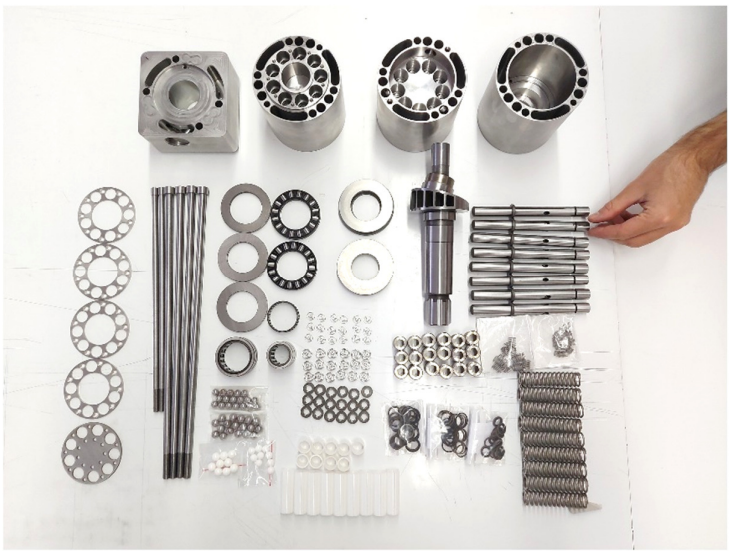
- vrsta vzdrževanja za vsako komponento (popravilo, delno popravilo ali zamenjava),
- program preventivnega vzdrževanja,
- nivo vzdrževanja za vsako okvaro in komponento (najnižji – na lokaciji, srednji – na servisu, najvišji-pri proizvajalcu),
- določitev vzdrževalnih virov,
- določitev števila vzdrževalnih kanalov, redundantnih komponent in rezervnih delov
- …

Predvidena vrsta in nivo vzdrževanja za razvito črpalko

Črpalka je kompleksen tehniški sistem. Zaradi izrazite dinamične obremenitve in zahtevnih kemijskih pogojev v vrtini so komponente izpostavljene neugodnim obratovalnim pogojem. Predvideni servisni interval je dolg (leto ali več), saj je postopek spusta in dviga črpalke, kot tudi zagona oz. zaustavitve črpanja zelo drag. V črpalko so zato vgrajene samo komponente, ki predvideni servisni interval zdržijo. Ob nastopu servisa je predvidenih več preventivnih akcij, kot so čiščenje, kontrola delovanja vseh komponent in sestava, kontrola obrabe, kontrola sistema mazanja in tesnilnih sistemov, pregled in odločitev o zamenjavi ključnih in najbolj obremenjenih komponent (dinamična tesnila in kotalni ležaji).

Vrsto vzdrževanja prilagodimo vsaki komponenti posebej. Večina komponent je zaradi obrabe, korozije, nabiranje karbonatov ali utrujenosti zaradi dinamične obremenitve nepopravljivih in jih je zato treba zamenjati. Večje komponente, kot so gredi in ohišja, niso predvidene za zamenjavo, zato se jih samo očisti, natančno pregleda in pripravi za ponovno vgradnjo.

Nivo vzdrževanja je odvisen od komponent in kompleksnosti izdelka/sistema. Ker gre v primeru črpalke za prototip, bo vzdrževanje izvedeno izključno lokalno.



Slika 56: Načrtovanje vzdrževanja za fazo testiranja prototipa črpalke – namenski strojni elementi.

Prav zaradi velikih stroškov montaže/demontaže in zagona/ustavljanja, v danem primeru interval vzdrževanja ni odvisen samo od sistema, temveč tudi od planiranega črpanja. Glede na smernice naročnika je planirani interval 1 leto ali ~ 8500 obratovalnih ur (24/7).

9.2.1 Smernice pristopanja k vzdrževanju kompleksnih sistemov

V splošnem na vzdrževalnost [10] vpliva več dejavnikov. Slika 57 kaže primarne (notranje) dejavnike in sekundarne (zunanje) dejavnike, ki vplivajo na nivo vzdrževalnosti sistema/izdelka/komponente (notranji krog) in temu primerno potreben čas namenjen vzdrževanju.



Slika 57: Vzdrževalnost. Povzeto po [8].

Koraki pred izvedbo vzdrževanja

1. Natančno določiti, katere komponente sistema je treba/lahko popraviti in katere zamenjati.
2. Določiti terminske načrte vzdrževanja in vključujoče aktivnosti (program vzdrževanja).
3. Popravljivim komponentam in za vsako identificirano vrsto okvare določiti nivo popravila.
4. Za vsako aktivnost vzdrževanja določiti orodja, postopke, opremo in navodila za vzdrževanje.
5. Določiti treba količino rezervnih komponent in dobavitelje.

[10] Vzdrževalnost je opredeljena kot verjetnost, da bo okvarjena komponenta ali sistem obnovljen ali popravljen na določeno stanje v določenem obdobju ali času, ko bo vzdrževanje opravljeno v skladu s predpisanimi postopki.

9.2.2 Vpliv preventivnega vzdrževanja na zanesljivost

Ko se komponenta ali izdelek pokvari, začne teči čas za popravilo. Čas za popravilo lahko porabimo za izvajanje najrazličnejših aktivnosti, kot so aktivnosti za pripravo na popravilo, diagnostiko in aktivnosti vezane na popravilo ali zamenjavo ter končnega preverjanja. V veliko primerih največ časa porabimo za ugotavljanje vzroka odpovedi, v bolj kompleksnih izdelkih in sistemih pa tudi za končno kalibracijo in nastavljanje.

V splošnem je tudi čas popravila/vzdrževanja T mogoče razumeti kot naključno spremenljivko, saj ponavljajoče se vzdrževalne aktivnosti rezultirajo v različnih časih popravil/vzdrževanja. To je posledica različnih mehanizmov in vrst okvar posameznih komponent kot tudi znanja in izkušenj serviserja.

Naključna spremenljivka z gostoto porazdelitve verjetnosti $h(t)$ ima sledečo kumulativno funkcijo časa popravil $H(t)$:

$$Pr\{T < t\} = H(t) = \int_0^t h(t)\ dt \qquad (120)$$

Sledi, da srednji oz. povprečni čas popravil $MTTR$ izračunamo na osnovi enačbe (15), varianco pa iz enačbe (18):

$$MTTR = \int_0^\infty t \cdot h(t)\ dt \qquad (121)$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - MTTR)^2 \cdot h(t)\ dt \qquad (122)$$

Računski primer

Gostota porazdelitve verjetnosti eksponentna je funkcija $h(t) = r \cdot e^{-r \cdot t}$. Če je funkcija intenzivnosti popravil določena z $r = \frac{1}{MTTR}$, potem velja, da je kumulativna funkcija enaka:

$$H(t) = \int_0^t r \cdot e^{-r \cdot t}\ dt = \int_0^t \frac{1}{MTTR} \cdot e^{-\frac{1}{MTTR} \cdot t} dt = 1 - e^{-\frac{1}{MTTR} \cdot t} \qquad (123)$$

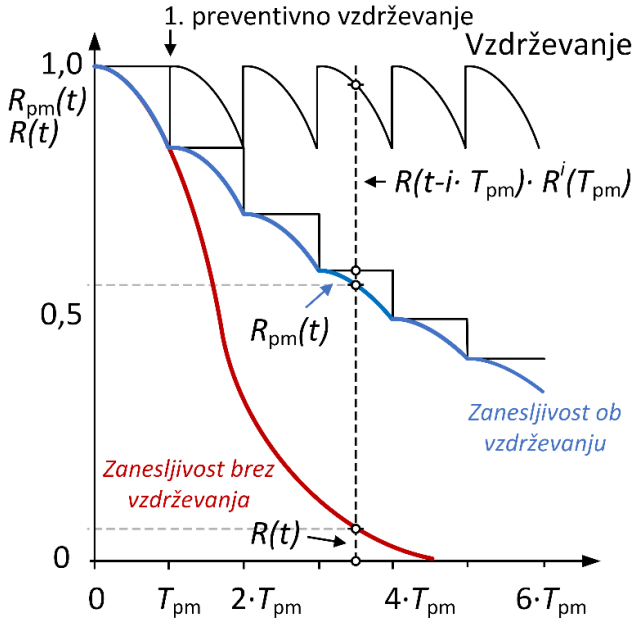
9.2.3 Zanesljivost in preventivno vzdrževanje

Zanesljivost s časom uporabe pada. S preventivnim vzdrževanjem pa lahko hitrost zniževanja zanesljivosti upočasnimo. Zanesljivost $R_{\mathrm{PM}}(t)$ v prvem in drugem intervalu (čas uporabe med zaporednima popraviloma) zapišemo z enačbama (124) in (125):

$$R_{PM}(t) = R(t) \quad ; za\, 0 \leq t \leq T_{pm} \tag{124}$$

$$R_{PM}(t) = R(T_{pm}) \cdot R(t - T_{pm}) \quad ; za\, T_{pm} \leq t \leq 2 \cdot T_{pm} \tag{125}$$

kjer je $R(T_{\mathrm{pm}})$ zanesljivost oz. verjetnost preživetja do prvega preventivnega vzdrževanja, $R(t - T_{\mathrm{pm}})$ pa predstavlja zanesljivost oz. verjetnost preživetja v naslednjem-drugem intervalu ($T_{\mathrm{pm}} \leq t \leq 2 \cdot T_{\mathrm{pm}}$) ob predpostavki, da sta bila izdelek ali komponenta obnovljena v začetno (novo) stanje. Primer padanja zanesljivosti v odvisnosti od vzdrževanja ali njegove odsotnosti kaže Slika 58. Na sliki lahko opazimo dva trenda padanja zanesljivosti s časom, in sicer prvi, strmejši trend (rdeča črta), pripada funkciji zanesljivosti brez vzdrževanja in druga, manj strma funkcija zanesljivosti (modra črta) z upoštevnim preventivnim vzdrževanjem.



Slika 58: Zanesljivost in vzdrževanje.

Zapišimo še izraz za izračun zanesljivosti do i-tega intervala ob upoštevanju preventivnega vzdrževanja (opomba o modri krivulji: pri izračunu prihodnje zanesljivosti se vedno vprašamo tudi o verjetnosti, da bo komponenta preživela do predvidene aktivnosti vzdrževanja. Ker se ta čas glede na trenutek izračuna povečuje, posamezne verjetnosti pa navezujejo na predhodne intervale vzdrževanja, zanesljivost v splošnem pada – vendar počasneje, kot bi sicer brez vzdrževanja):

$$R_{PM}(t) = R^i(T_{pm}) \cdot R(t - i \cdot T_{pm}) \;\; ; za\, i \cdot T_{pm} \leq t \leq (i+1) \cdot T_{pm} \qquad (126)$$

9.2.4 Računske naloge

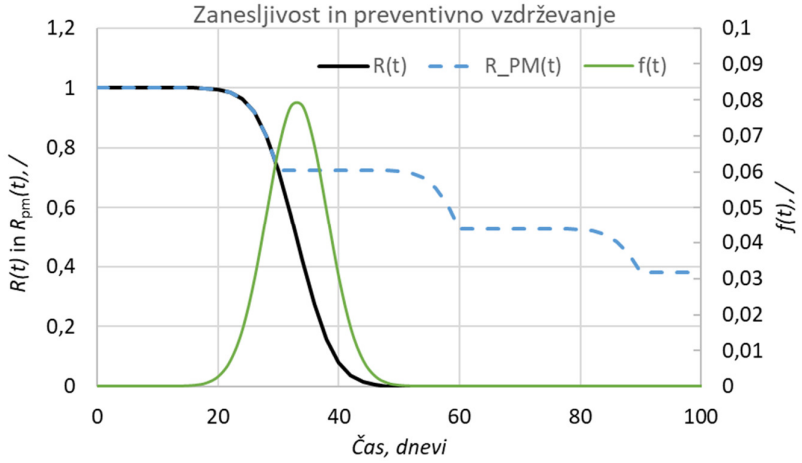
1. Kolikšna bi bila zanesljivost stroja 10 dni po rednem preventivnim vzdrževanju, če bi bilo vzdrževanje opravljeno 3-krat z intervalom vzdrževanja 30 dni. Stroj ima konstantno intenzivnost okvar $0{,}002$ okvare/dan.

2. Kolikšna bi bila zanesljivost stroja 10 dni po rednem preventivnim vzdrževanju, če bi bilo vzdrževanje opravljeno 3-krat z intervalom vzdrževanja 30 dni. Okvare stroja sledijo normalni porazdelitvi s srednjo vrednostjo 33 dni in standardno deviacijo 5 dni.

Rešitev:

1. $R(t) = 0{,}818$ (namig: razmislite, kako je s preventivnim vzdrževanjem in konstantno *intenzivnostjo okvar).*

2. $R(t) = 0{,}382$



Slika 59: Zanesljivost in vzdrževanje – rešitev naloge 2.

9.3 Razgradnja in reciklaža

Reciklaža[11] je osnova krožnega gospodarstva. Prek reciklaže se surovine vračajo v ponovno uporabo. Na ta način se lahko bistveno zmanjša potreba po proizvodnji novih osnovnih materialov in energiji za njihovo pridelavo, kot tudi količina odpadkov [23]. Nivo in sposobnost reciklaže je odvisen od zmožnosti materiala povrniti se v stanje s prvotnimi (osnovnimi) lastnostmi. Zelo dobro se reciklirajo kovinski, papirnati in stekleni materiali, vse več pa je tudi recikliranja polimernih, tekstilnih in gumenih materialov. Žal pa obstaja veliko materialov in izdelkov, ki jih ni mogoče preprosto reciklirati. Mednje sodijo izdelki iz polimernih kompozitov (kombinacije polimer–papir, polimer–kovina, večpolimerni kompoziti, duroplasti in smole) in različne vrste baterij.

Nivo »reciklabilnosti« izdelka je odvisna od proizvajalca, ki določi kompleksnost konstrukcije izdelka, uporabljene materiale in tehnološke postopke izdelave. V želji po čim večjem zaslužku, zahtevah po varnosti in zanesljivosti veliko izdelkov danes ni mogoče v celoti popraviti, niti reciklirati (pojma sta v resnici močno povezana). Po ocenah naj bi bilo danes samo 8,5 % novih izdelkov izdelanih iz recikliranih materialov [23].



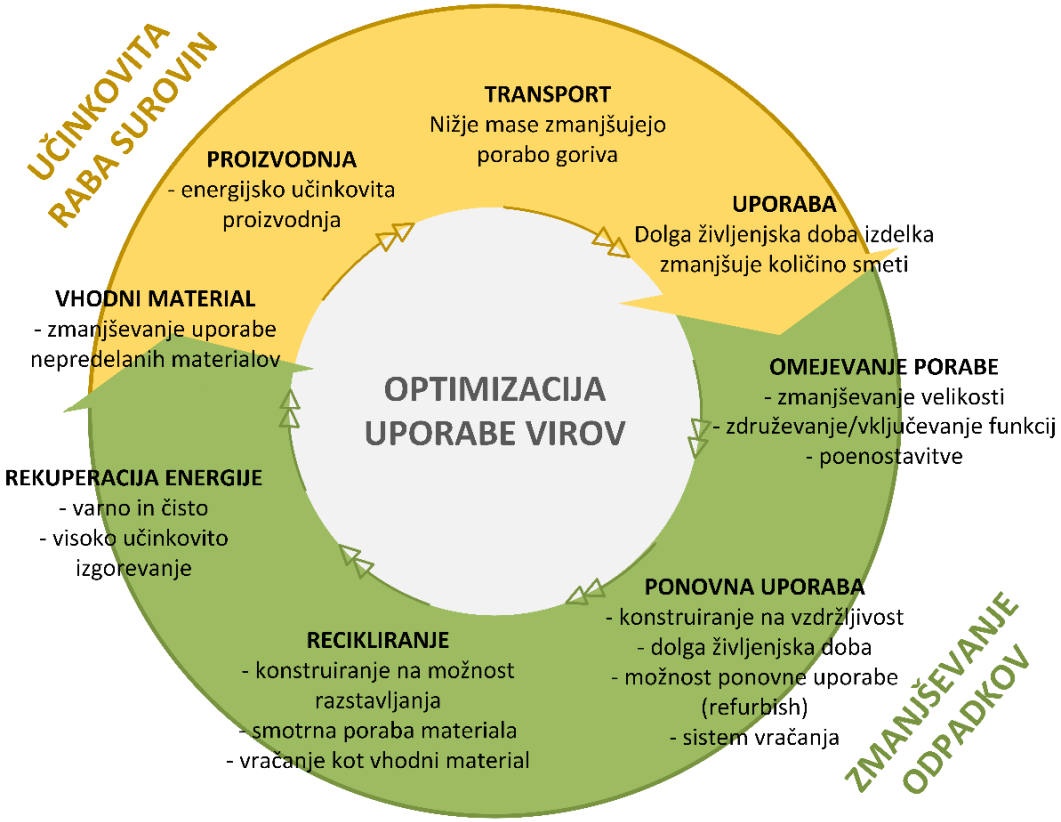
Slika 60: Pogledi na recikliranje. Povzeto po [23].

O recikliranju izdelka je treba razmišljati že v fazi koncipiranja (opomba: levi del V-modela prikazanega na Sliki 18) in ne šele pred smetnjakom.

[11] SSKJ: teh. ponovna uporaba že uporabljenih, odpadnih snovi v proizvodnem procesu: reciklaža kemikalij, plinov / reciklaža starega papirja [28]

Ker razpoložljive količine novih osnovnih materialov z leti padajo, potrebe v proizvodnji pa se na drugi strani nenehno povečuje (osnova ekonomske logike napredka), ponovna raba in recikliranje trenutno predstavljata edino rešitev za ohranjanje naravnega okolja in kakovost izdelkov za končnega uporabnika. Ena od možnosti, ki se že pojavlja, je tudi vračanje starih in še delujočih izdelkov za ponovno uporabo (*angl. refurbish*), ali pa vračanje proizvajalcu zaradi specifičnega načina reciklaže in ponovne uporabe komponent ali materialov. Poleg tega pa še premišljena izbira vhodnih materialov in tudi ozaveščanje uporabnikov (!).

Pri oblikovanju izdelkov z mislijo na reciklažo je treba razmišljati celostno, in sicer kako porabiti čim manj snovi in energije kot tudi, kako proizvesti čim manj odpadkov. Nekaj idej je predstavljenih na Sliki 61.



Slika 61: Konstruiranje izdelkov z mislijo na ponovno uporabo. Povzeto po [24].

Med zahtevnejšimi[12] za reciklažo, kot tudi za vračanje recikliranega granulata v ponovno izdelavo so polimerni materiali. Ponovna uporaba je močno odvisna od vrste polimera (tehnologija izdelave) kot tudi kakovosti recikliranega granulata. Slednje je še posebej problematično, saj reciklat v večini vsebuje nečistoče in druge vrste materialov, kot so druge vrste polimerov, organske delce, steklo, kovinske delce ipd., ki se primešajo med postopkom razvrščanja in mletja. Dodatno je treba pred uporabo recikliranega polimera preveriti njegove mehanske in trdnostne lastnosti, saj material ob prvi predelavi in med uporabo lahko pomembno degradira (mikro-razpadanje s spremembami molekularne mase in morfologije). Posledično se reciklirani polimerni materiali pogosto primešajo čistemu materialu, s čimer se zmanjša poraba surovin. Opisanih omejitev je v primeru recikliranja enake vrste kovin bistveno manj.

Literatura s področja oblikovanja izdelkov z mislijo na servisiranje in reciklažo je vedno več, ne nujno z istim pogledom na tematiko. Na Sliki 62 je za zaključek tega poglavja podanih nekaj praktičnih smernic [25] za snovanje trajnostnih izdelkov z mislijo na njihovo reciklažo, na Sliki 63 nekaj praktičnih smernic za oblikovanje izdelkov z mislijo na njihovo servisiranje/razstavljanje in na Sliki 64 še nekaj praktičnih smernic za oblikovanje izdelkov z mislijo na njihovo ponovno uporabo (delno ali v celoti).

[12] Polimernih umetnih materialov je veliko vrst, katerih granulati medsebojno v večini niso kompatibilni.

Področje	**Smernice**
Materiali	• Zmanjšajte število različnih vrst materialov • Izdelati podsestave in neločljivo povezane dele iz enakega ali kompatibilnega materiala • Izogibajte se mešanju materialov v sestavu • Označite vse plastične in podobne dele za lažjo identifikacijo • Uporabljajte materiale, ki jih je mogoče reciklirati • Uporabljajte reciklirane materiale • Zagotovite združljivost črnila, kjer je potrebno tiskanje na plastične dele • Izogibajte se kompozitnim materialom • Odstranite nezdružljive oznake na plastičnih delih • Nevarni deli morajo biti jasno označeni in zlahka odstranljivi
Pritrdilni elementi in povezave	• Zmanjšajte število pritrdilnih elementov • Zmanjšajte število potrebnih orodij za odstranjevanje pritrdilnih elementov • Pritrdilne elemente je mogoče zlahka odstraniti • Pritrdilne točke morajo biti lahko dostopne • Zaskočni deli morajo biti jasno nameščeni in jih je mogoče razstaviti s standardnimi orodji • Poskusite uporabiti pritrdilne elemente iz materiala, ki je združljiv s povezanimi deli • Če dva dela nista združljiva, ju enostavno ločite • Odstranite lepila, razen če so združljiva z obema spojenima deloma • Zmanjšajte število in dolžino uporabljenih povezovalnih žic ali kablov • Povezave so lahko zasnovane tako, da se zlomijo kot alternativa odstranjevanju pritrdilnih elementov
Struktura izdelka	• Zmanjšajte število delov • Zasnove naj bodo čim bolj modularne, z ločevanjem funkcij • Poiščite dele, ki jih ni mogoče reciklirati, na enem mestu, ki jih je mogoče hitro odstraniti in zavreči • Poiščite dele z najvišjo vrednostjo na lahko dostopnih mestih • Oblikujte dele za stabilnost med razstavljanjem • Izogibajte se kovinskih vstavkom ali ojačitvam v plastičnih delih • Dostopne in prelomne točke morajo biti vidne

Slika 62: Snovanje trajnostnih izdelkov z mislijo na njihovo reciklažo. Povzeto po [25].

Glavni kriteriji	**Smernice**
Manj dela pri razstavljanju	• Kombinirajte elemente, ustvarite modularno zasnovo • Uporabljajte združljive materiale • Omejite število različnih materialov • Združite škodljive materiale v podsestave • Zagotovite enostaven dostop do škodljivih, dragih ali delov, ki jih je mogoče ponovno uporabiti
Predvidljiva konfiguracija izdelka	• Lahka in trdna gradnja, zmanjša število lomljivih delov • Izogibajte se kombinaciji materialov, ki se starajo in korodirajo • Zaščitite podsestave pred umazanijo in korozijo
Enostavna demontaža	• Spoji naj bodo vidni in dostopni, izogibajte se skritim spojem • Uporabljajte pritrdilne elemente namesto lepil. Uporabite pritrdilne elemente, ki jih je enostavno odstraniti ali uničiti • Zmanjšajte število spojev in povezav • Uporabite iste pritrdilne elemente za številne komponente • Zagotavljanje enostavnega dostopa do točk odklopa, zloma ali reza • Izogibajte se zapletenim gibom pri razstavljanju • Namestite sredinske elemente na osnovni del-platformo • Izogibajte se kovinskim vstavkom v plastičnih delih
Enostavno rokovanje	• Pustite površino na voljo za prijemanje • Izogibajte se ne-togim delom • Strupene snovi zaprite v zaprte posode • Konstruirajte z mislijo na avtomatizirano razstavljanje • Izognite se zahtevi po posebnih postopkih razstavljanja • Izogibajte se dolgim postopkom razstavljanja
Enostavna ločevanje	• Izogibajte se sekundarni končni obdelavi (barvanje, premazovanje, galvanizacija itd.) • Zagotovite oznake ali različne barve kode za enostavno ločevanje materialov • Izogibajte se delom in materialom, ki bi lahko poškodovali stroje (npr. drobilnik, rezalnik)
Zmanjšanje števila variant	• Uporabite standardne podsestave in komponente • Zmanjšajte število vrst pritrdilnih elementov
Materiali	• Zmanjšajte število vrst uporabljenih materialov • Uporabljajte materiale, ki jih je mogoče reciklirati • Zmanjšajte ali ne uporabite strupenih ali nevarnih materialov

Slika 63: Snovanje trajnostnih izdelkov z mislijo na njihovo servisiranje/razstavljanje. Povzeto po [25].

Glavni kriteriji	Smernice
Enostavnost sortiranja	• Zmanjšajte raznolikost izdelkov in delov • Zagotovite jasne razlikovalne značilnosti, ki omogočajo preprosto prepoznavanje • Zagotovite berljive nalepke, besedilo in črtne kode, ki se med življenjsko dobo izdelka ne obrabijo
Enostavnost demontaže	• Izogibajte se trajnim pritrdilnim elementom, ki zahtevajo destruktivno odstranitev • Če je potrebna destruktivna odstranitev, pazite, da ne pride do poškodb osnove • Zmanjšajte število pritrdilnih elementov, ki so nagnjeni k poškodbam in zlomom med odstranjevanjem • Povečajte odpornost pritrdilnih elementov na korozijo • Zmanjšajte skupno število pritrdilnih elementov • Zmanjšajte število krčnih nasedov • Zmanjšajte število pritrdilnih elementov, ki niso v neposredni vidni liniji • Standardizirajte pritrdilne elemente z zmanjšanjem števila različnih vrst pritrdilnih elementov in števila različnih velikosti pritrdilnih elementov
Enostavnost čiščenja	• Zaščitite dele in površine pred korozijo in umazanijo • Izogibajte se funkcijam izdelka ali delov, ki se lahko med čiščenjem poškodujejo, ali pa jih naredite odstranljive • Zmanjšajte geometrijske značilnosti, v katerih se lahko med uporabo ujamejo nečistoče • Zmanjšajte število votlin in lukenj, v katere se lahko stekajo in kopičijo ostanki med čiščenjem • Preprečite kontaminacijo zaradi obrabe
Enostavnost kontrole in pregleda	• Zmanjšajte čas pregleda • Zmanjšajte število potrebnih kosov opreme za testiranje in inšpekcijo ter raven zahtevnosti • Zagotovite dobro dokumentacijo in natančno specificirajte korake testiranja
Enostavnost zamenjave	• Zmanjšajte čas, potreben za ponovno sestavljanje izdelka • Preprečite poškodbe med vstavljanjem delov • Zagotovite dobro dokumentacijo specifikacij in jasna navodila za zamenjavo
Enostavnost ponovnega sestavljanja	• Zmanjšajte čas, potreben za ponovno sestavljanje izdelka • Zagotovite dobro dokumentacijo specifikacij in jasna navodila za sestavljanje
Komponente za ponovno uporabo	• Oblikujte platformo za večkratno uporabo in module za večkratno uporabo • Izberite materiale, da zagotovite zanesljivost in vzdržljivost izdelka • Prepričajte se, da so komponente dovolj robustne za ponovno uporabo brez zamenjave • Izogibajte se strupenim materialom
Standardizacija	• Standardizirajte in uporabljajte skupne dele in materiale • Standardizirajte in uporabljajte običajne pritrdilne elemente • Standardizirajte in uporabljati običajne in dobro poznane postopke • Standardizirajte in uporabljajte običajna orodja

Slika 64: Snovanje trajnostnih izdelkov z mislijo na njihovo ponovno uporabo. Povzeto po [25].

O odgovorni odstranitvi in reciklaži je smiselno razmišljati že v prvih razvojno konstrukcijskih korakih. Tako naj priporočila zgornjih tabel čim bolj vključimo tudi v koncepte in prototipe. Na ta način se lahko bistveno izboljša možnost za vključitev trajnostnih rešitev tudi v končni izdelek. Na primeru črpalke je malo sestavnih delov, ki bi bili kompoziti ali pa bi jih bilo težko ločiti. V večini gre za preprosto »*reciklabilna*« jeklena gradiva in nekaj manjših polimernih gumenih

komponent (tesnila). Največ skrbi za odgovorno odstranitev po uporabi zahtevata mazalno olje in keramične puše.

Poleg razmisleka o reciklaži, smo z manjšimi prilagoditvami dizajna med razvojnimi verzijami povečali tudi število serijskih komponent, ki jih je mogoče prosto kupiti in niso vezana na namensko proizvodnjo. S tem bistveno zmanjšujemo odvisnost od zalog/pogojev (prototipnih delavnic), kot tudi strošek prototipa oz. prihodnjega serijskega izdelka, črpalko pa bo zato mogoče servisirati lokalno brez uporabe posebnih orodij.



Slika 65: Prvih pet prototipov nove generacije črpalk za črpanje tekočin z nizko viskoznostjo in gostote pri visokih tlakih in temperaturah.

10 Literatura

1. Nagode, M. *Razvojna Vrednotenja - Predloge k Predavanjem*; Fakulteta za strojništvo, UL: Ljubljana, 2012;

2. Nagode, Marko ; Oman, Simon; Šeruga, D. *Snovanje Izdelkov z Vidika Zanesljivosti*; Fakulteta za strojništvo, UL: Ljubljana, 2022; ISBN 978-961-6980-89-0.

3. Ebeling, C.E. *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*; 1st ed.; McGraw-Hill, Boston.; ISBN 9780071152488.

4. Klemenc, J. *Efektivnost Izdelkov*; 1. izdaja.; Fakulteta za strojništvo, UL: Ljubljana, 2017; ISBN 978-961-6980-31-9.

5. Novak, Lovrenc ; Petkovšek, Martin ; Oman, Simon ; Nagode, Marko ; Klemenc, Jernej ; Majdič, Franc ; Hočevar, Marko ; Gosar, Aleš ; Olah, L. Downhole Three Phase Separator and Method for Use of Same: United States Patent US 11,143,009 B1 2021.

6. Oman, Simon ; Nagode, Marko ; Klemenc, Jernej ; Majdič, Franc ; Hočevar, Marko ; Gosar, Aleš ; Škrlec, Andrej ; Olah, L. Submersible Pump Assembly and Method for Use of Same : United States Patent US 10,883,488 B1 2021.

7. Oman, Simon ; Nagode, Marko ; Klemenc, Jernej ; Majdič, Franc ; Hočevar, Marko ; Gosar, Aleš ; Škrlec, Andrej ; Olah, L. Submersible Pump Assembly and Method for Use of Same : United States Patent US 10,995,745 B1 2021.

8. O'Connor, P.D.T. *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering, Charles E. Ebeling, McGraw-Hill, 1997. Number of Pages: 489. Price: £22.99.*; 1998; Vol. 14;.

9. Kouassi, E.; Akpata, E.; Pokou, K. A Note on Laplace Transforms of Some Common Distributions Used in Counting Processes Analysis. *Appl. Math.* **2020**, *11*, 67–75, doi:10.4236/am.2020.112007.

10. Groll, M.W.; Heber, D. E/E-Product Data Management in Consideration of Model-Based Systems Engineering. *Adv. Transdiscipl. Eng.* **2016**, *4*, 289–298, doi:10.3233/978-1-61499-703-0-289.

11. Redundanca Strežniških Komponent Available online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ServerPhotos_Front-Back.jpg.

12. Redundanca v Računalništvu Available online: https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_RAID_levels.

13. Redundanca Na Letalu Available online: https://aopa.org/news-and-media/all-news/2020/october/pilot/a-fly-by-wire-future.

14. Mccann, D.J.; Ward, A.J. Kompleksna Vezava Zavornega Sistema Osebnega Vozila EP0995659A1 2000.

15. Na Komponente Razstavljeno Osebno Vozilo Available online: https://gomechanic.in/blog/car-spare-parts/ (accessed on 23 August 2024).

16. Dobavna Veriga Available online: https://www.qimaone.com/resource-hub/sc-visibility-series-multi.

17. Kvalitativna Merila Pri Odločitvi “Make or Buy” Available online: https://www.wallstreetmojo.com/make-or-buy-decision/.

18. Pristanek Letala Available online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:N201UU_US_Airways_(4493174629).jpg (accessed on 23 August 2024).

19. Jez Available online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Überlauf_Edertalsperre_vom_Uhrenkopf.jpg (accessed on 23 August 2024).

20. Marko Nagode, Ma.F. *Efektivnost Proizvodov: Predloga k Predavanjem*; Fakulteta za strojništvo, UL: Ljubljana, 2003;

21. Vzdrževanje Vozila Available online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goshen_Burning_Car.jpg (accessed on 23 August 2024).

22. Vzdrževanje Kot Pomembna Aktivnost Available online: https://nanotronics.ai/resources/charlies-rage-against-the-machine (accessed on 23 August 2024).

23. Seier, M.; Roitner, J.; Archodoulaki, V.-M.; Jones, M.P. Design from Recycling: Overcoming Barriers in Regranulate Use in a Circular Economy. *Resour. Conserv. Recycl.*

2023, *196*, 107052, doi:10.1016/j.resconrec.2023.107052.

24. Lundquist, L.; Leterrier, Y.; Sunderland, P. *Life Cycle Engineering of Plastics: Technology, Economy, and the Environment*; L. Lundquist, Y. Leterrier, P. Sunderland, J.A.E.M., Ed.; 1st ed.; Elsevier Science, 2000; ISBN 0080438865.

25. Go, T.F.; Wahab, D.A.; Hishamuddin, H. Multiple Generation Life-Cycles for Product Sustainability: The Way Forward. *J. Clean. Prod.* **2015**, *95*, 16–29, doi:10.1016/j.jclepro.2015.02.065.

26. I. N. Bronštejn;K. A. Semendjajev;G. Musiol;H. Mühlig *Matematični Priročnik*; Tehniška založba Slovenije, 1997; ISBN 86-365-0216-0.

27. Razlaga Pojma Redundanca Available online: https://fran.si/133/sskj2-slovar-slovenskega-knjiznega-jezika-2/4526145/redundanca?View=1&Query=redundanca.

28. Razlaga Pojma Reciklaža Available online: https://fran.si/133/sskj2-slovar-slovenskega-knjiznega-jezika-2/4526012/reciklaza?View=1&Query=reciklaža (accessed on 23 August 2024).

Priloga 1: Podatki meritve

Podatki meritve časov do porušitve t, s – nesortirani vzorec.

i	t, s	i	t, s	i	t, s	i	t, s	i	t, s
1	86,0835	41	68,3776	81	96,5452	121	77,2716	161	93,7542
2	54,1721	42	53,0391	82	113,8602	122	65,1826	162	74,5479
3	81,7684	43	119,3391	83	102,5317	123	75,6592	163	83,1158
4	65,1181	44	83,3565	84	88,0379	124	90,3116	164	83,3533
5	88,3304	45	68,4233	85	43,7737	125	84,8577	165	43,1708
6	98,3863	46	57,6935	86	72,1332	126	88,9476	166	61,0187
7	56,1313	47	123,5226	87	69,6606	127	77,2523	167	65,6199
8	83,4903	48	70,6584	88	83,5185	128	107,5081	168	116,0825
9	86,2333	49	85,3727	89	128,9464	129	94,5785	169	96,9191
10	85,5484	50	53,3645	90	77,2367	130	79,2682	170	79,2360
11	113,0624	51	49,3112	91	71,6273	131	75,4415	171	115,6169
12	33,5922	52	92,5616	92	49,1793	132	62,0439	172	92,4109
13	117,3997	53	90,6859	93	98,0624	133	72,0324	173	69,6492
14	93,4711	54	50,8393	94	28,4228	134	80,2406	174	69,6292
15	110,7087	55	103,7449	95	97,4264	135	116,1774	175	56,6523
16	86,9930	56	99,1960	96	99,2300	136	107,2953	176	88,9743
17	105,6782	57	96,2152	97	89,9498	137	77,3162	177	105,1393
18	74,4972	58	92,7693	98	116,6413	138	66,9812	178	91,4468
19	93,3852	59	101,1142	99	129,6504	139	52,5300	179	78,9319
20	67,3147	60	98,5368	100	78,1633	140	64,8020	180	89,8707
21	62,7288	61	77,7275	101	94,8514	141	79,9266	181	66,3671
22	107,5620	62	67,1589	102	63,7758	142	69,5020	182	66,8263
23	120,1910	63	105,7807	103	115,0160	143	92,7546	183	85,0332
24	71,5238	64	114,7305	104	114,8508	144	100,3197	184	91,0448
25	61,4696	65	124,2144	105	105,7993	145	120,7084	185	74,4714
26	100,3501	66	88,7359	106	82,9390	146	101,5474	186	101,7209
27	78,3433	67	104,6958	107	119,6419	147	99,3275	187	79,2115
28	97,5998	68	103,4940	108	101,1092	148	74,6110	188	90,7679
29	98,5980	69	82,6354	109	82,9045	149	89,3410	189	92,9703
30	86,8357	70	61,6406	110	107,3636	150	126,4540	190	86,8797
31	68,3145	71	95,4697	111	50,8337	151	111,8612	191	118,3812
32	71,5564	72	52,5449	112	95,2416	152	83,8650	192	127,9395
33	87,9109	73	103,6680	113	100,6847	153	64,0872	193	98,7804
34	89,8939	74	41,7264	114	79,2414	154	82,4095	194	78,5464
35	101,6409	75	107,0488	115	79,5490	155	72,3592	195	66,0536
36	85,9901	76	78,8341	116	78,2370	156	91,9844	196	60,3194
37	75,7169	77	73,7659	117	96,2785	157	112,5505	197	61,1614
38	107,2976	78	46,9977	118	105,8470	158	29,4969	198	104,4922
39	86,3121	79	74,5895	119	89,7687	159	97,4830	199	104,6583
40	81,8208	80	105,8171	120	44,4262	160	67,2055	200	62,2123

Priloga 2: Standardizirana normalna spremenljivka $\Phi(z)$

Tabela z vrednostmi standardizirane normalne spremenljivke $\Phi(z)$.

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-4,00	0,00003	0,99997
-3,99	0,00003	0,99997
-3,98	0,00003	0,99997
-3,97	0,00004	0,99996
-3,96	0,00004	0,99996
-3,95	0,00004	0,99996
-3,94	0,00004	0,99996
-3,93	0,00004	0,99996
-3,92	0,00004	0,99996
-3,91	0,00005	0,99995
-3,90	0,00005	0,99995
-3,89	0,00005	0,99995
-3,88	0,00005	0,99995
-3,87	0,00005	0,99995
-3,86	0,00006	0,99994
-3,85	0,00006	0,99994
-3,84	0,00006	0,99994
-3,83	0,00006	0,99994
-3,82	0,00007	0,99993
-3,81	0,00007	0,99993
-3,80	0,00007	0,99993
-3,79	0,00008	0,99992
-3,78	0,00008	0,99992
-3,77	0,00008	0,99992
-3,76	0,00008	0,99992
-3,75	0,00009	0,99991
-3,74	0,00009	0,99991
-3,73	0,00010	0,99990
-3,72	0,00010	0,99990
-3,71	0,00010	0,99990
-3,70	0,00011	0,99989
-3,69	0,00011	0,99989
-3,68	0,00012	0,99988
-3,67	0,00012	0,99988
-3,66	0,00013	0,99987
-3,65	0,00013	0,99987
-3,64	0,00014	0,99986
-3,63	0,00014	0,99986
-3,62	0,00015	0,99985

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-3,61	0,00015	0,99985
-3,60	0,00016	0,99984
-3,59	0,00017	0,99983
-3,58	0,00017	0,99983
-3,57	0,00018	0,99982
-3,56	0,00019	0,99981
-3,55	0,00019	0,99981
-3,54	0,00020	0,99980
-3,53	0,00021	0,99979
-3,52	0,00022	0,99978
-3,51	0,00022	0,99978
-3,50	0,00023	0,99977
-3,49	0,00024	0,99976
-3,48	0,00025	0,99975
-3,47	0,00026	0,99974
-3,46	0,00027	0,99973
-3,45	0,00028	0,99972
-3,44	0,00029	0,99971
-3,43	0,00030	0,99970
-3,42	0,00031	0,99969
-3,41	0,00032	0,99968
-3,40	0,00034	0,99966
-3,39	0,00035	0,99965
-3,38	0,00036	0,99964
-3,37	0,00038	0,99962
-3,36	0,00039	0,99961
-3,35	0,00040	0,99960
-3,34	0,00042	0,99958
-3,33	0,00043	0,99957
-3,32	0,00045	0,99955
-3,31	0,00047	0,99953
-3,30	0,00048	0,99952
-3,29	0,00050	0,99950
-3,28	0,00052	0,99948
-3,27	0,00054	0,99946
-3,26	0,00056	0,99944
-3,25	0,00058	0,99942
-3,24	0,00060	0,99940
-3,23	0,00062	0,99938

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-3,22	0,00064	0,99936
-3,21	0,00066	0,99934
-3,20	0,00069	0,99931
-3,19	0,00071	0,99929
-3,18	0,00074	0,99926
-3,17	0,00076	0,99924
-3,16	0,00079	0,99921
-3,15	0,00082	0,99918
-3,14	0,00084	0,99916
-3,13	0,00087	0,99913
-3,12	0,00090	0,99910
-3,11	0,00094	0,99906
-3,10	0,00097	0,99903
-3,09	0,00100	0,99900
-3,08	0,00104	0,99896
-3,07	0,00107	0,99893
-3,06	0,00111	0,99889
-3,05	0,00114	0,99886
-3,04	0,00118	0,99882
-3,03	0,00122	0,99878
-3,02	0,00126	0,99874
-3,01	0,00131	0,99869
-3,00	0,00135	0,99865
-2,99	0,00139	0,99861
-2,98	0,00144	0,99856
-2,97	0,00149	0,99851
-2,96	0,00154	0,99846
-2,95	0,00159	0,99841
-2,94	0,00164	0,99836
-2,93	0,00169	0,99831
-2,92	0,00175	0,99825
-2,91	0,00181	0,99819
-2,90	0,00187	0,99813
-2,89	0,00193	0,99807
-2,88	0,00199	0,99801
-2,87	0,00205	0,99795
-2,86	0,00212	0,99788
-2,85	0,00219	0,99781
-2,84	0,00226	0,99774

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-2,83	0,00233	0,99767
-2,82	0,00240	0,99760
-2,81	0,00248	0,99752
-2,80	0,00256	0,99744
-2,79	0,00264	0,99736
-2,78	0,00272	0,99728
-2,77	0,00280	0,99720
-2,76	0,00289	0,99711
-2,75	0,00298	0,99702
-2,74	0,00307	0,99693
-2,73	0,00317	0,99683
-2,72	0,00326	0,99674
-2,71	0,00336	0,99664
-2,70	0,00347	0,99653
-2,69	0,00357	0,99643
-2,68	0,00368	0,99632
-2,67	0,00379	0,99621
-2,66	0,00391	0,99609
-2,65	0,00402	0,99598
-2,64	0,00415	0,99585
-2,63	0,00427	0,99573
-2,62	0,00440	0,99560
-2,61	0,00453	0,99547
-2,60	0,00466	0,99534
-2,59	0,00480	0,99520
-2,58	0,00494	0,99506
-2,57	0,00508	0,99492
-2,56	0,00523	0,99477
-2,55	0,00539	0,99461
-2,54	0,00554	0,99446
-2,53	0,00570	0,99430
-2,52	0,00587	0,99413
-2,51	0,00604	0,99396
-2,50	0,00621	0,99379
-2,49	0,00639	0,99361
-2,48	0,00657	0,99343
-2,47	0,00676	0,99324
-2,46	0,00695	0,99305
-2,45	0,00714	0,99286
-2,44	0,00734	0,99266
-2,43	0,00755	0,99245
-2,42	0,00776	0,99224
-2,41	0,00798	0,99202

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-2,40	0,00820	0,99180
-2,39	0,00842	0,99158
-2,38	0,00866	0,99134
-2,37	0,00889	0,99111
-2,36	0,00914	0,99086
-2,35	0,00939	0,99061
-2,34	0,00964	0,99036
-2,33	0,00990	0,99010
-2,32	0,01017	0,98983
-2,31	0,01044	0,98956
-2,30	0,01072	0,98928
-2,29	0,01101	0,98899
-2,28	0,01130	0,98870
-2,27	0,01160	0,98840
-2,26	0,01191	0,98809
-2,25	0,01222	0,98778
-2,24	0,01255	0,98745
-2,23	0,01287	0,98713
-2,22	0,01321	0,98679
-2,21	0,01355	0,98645
-2,20	0,01390	0,98610
-2,19	0,01426	0,98574
-2,18	0,01463	0,98537
-2,17	0,01500	0,98500
-2,16	0,01539	0,98461
-2,15	0,01578	0,98422
-2,14	0,01618	0,98382
-2,13	0,01659	0,98341
-2,12	0,01700	0,98300
-2,11	0,01743	0,98257
-2,10	0,01786	0,98214
-2,09	0,01831	0,98169
-2,08	0,01876	0,98124
-2,07	0,01923	0,98077
-2,06	0,01970	0,98030
-2,05	0,02018	0,97982
-2,04	0,02068	0,97932
-2,03	0,02118	0,97882
-2,02	0,02169	0,97831
-2,01	0,02222	0,97778
-2,00	0,02275	0,97725
-1,99	0,02330	0,97670
-1,98	0,02385	0,97615

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-1,97	0,02442	0,97558
-1,96	0,02500	0,97500
-1,95	0,02559	0,97441
-1,94	0,02619	0,97381
-1,93	0,02680	0,97320
-1,92	0,02743	0,97257
-1,91	0,02807	0,97193
-1,90	0,02872	0,97128
-1,89	0,02938	0,97062
-1,88	0,03005	0,96995
-1,87	0,03074	0,96926
-1,86	0,03144	0,96856
-1,85	0,03216	0,96784
-1,84	0,03288	0,96712
-1,83	0,03362	0,96638
-1,82	0,03438	0,96562
-1,81	0,03515	0,96485
-1,80	0,03593	0,96407
-1,79	0,03673	0,96327
-1,78	0,03754	0,96246
-1,77	0,03836	0,96164
-1,76	0,03920	0,96080
-1,75	0,04006	0,95994
-1,74	0,04093	0,95907
-1,73	0,04182	0,95818
-1,72	0,04272	0,95728
-1,71	0,04363	0,95637
-1,70	0,04457	0,95543
-1,69	0,04551	0,95449
-1,68	0,04648	0,95352
-1,67	0,04746	0,95254
-1,66	0,04846	0,95154
-1,65	0,04947	0,95053
-1,64	0,05050	0,94950
-1,63	0,05155	0,94845
-1,62	0,05262	0,94738
-1,61	0,05370	0,94630
-1,60	0,05480	0,94520
-1,59	0,05592	0,94408
-1,58	0,05705	0,94295
-1,57	0,05821	0,94179
-1,56	0,05938	0,94062
-1,55	0,06057	0,93943

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-1,54	0,06178	0,93822
-1,53	0,06301	0,93699
-1,52	0,06426	0,93574
-1,51	0,06552	0,93448
-1,50	0,06681	0,93319
-1,49	0,06811	0,93189
-1,48	0,06944	0,93056
-1,47	0,07078	0,92922
-1,46	0,07215	0,92785
-1,45	0,07353	0,92647
-1,44	0,07493	0,92507
-1,43	0,07636	0,92364
-1,42	0,07780	0,92220
-1,41	0,07927	0,92073
-1,40	0,08076	0,91924
-1,39	0,08226	0,91774
-1,38	0,08379	0,91621
-1,37	0,08534	0,91466
-1,36	0,08691	0,91309
-1,35	0,08851	0,91149
-1,34	0,09012	0,90988
-1,33	0,09176	0,90824
-1,32	0,09342	0,90658
-1,31	0,09510	0,90490
-1,30	0,09680	0,90320
-1,29	0,09853	0,90147
-1,28	0,10027	0,89973
-1,27	0,10204	0,89796
-1,26	0,10383	0,89617
-1,25	0,10565	0,89435
-1,24	0,10749	0,89251
-1,23	0,10935	0,89065
-1,22	0,11123	0,88877
-1,21	0,11314	0,88686
-1,20	0,11507	0,88493
-1,19	0,11702	0,88298
-1,18	0,11900	0,88100
-1,17	0,12100	0,87900
-1,16	0,12302	0,87698
-1,15	0,12507	0,87493
-1,14	0,12714	0,87286
-1,13	0,12924	0,87076
-1,12	0,13136	0,86864

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-1,11	0,13350	0,86650
-1,10	0,13567	0,86433
-1,09	0,13786	0,86214
-1,08	0,14007	0,85993
-1,07	0,14231	0,85769
-1,06	0,14457	0,85543
-1,05	0,14686	0,85314
-1,04	0,14917	0,85083
-1,03	0,15151	0,84849
-1,02	0,15386	0,84614
-1,01	0,15625	0,84375
-1,00	0,15866	0,84134
-0,99	0,16109	0,83891
-0,98	0,16354	0,83646
-0,97	0,16602	0,83398
-0,96	0,16853	0,83147
-0,95	0,17106	0,82894
-0,94	0,17361	0,82639
-0,93	0,17619	0,82381
-0,92	0,17879	0,82121
-0,91	0,18141	0,81859
-0,90	0,18406	0,81594
-0,89	0,18673	0,81327
-0,88	0,18943	0,81057
-0,87	0,19215	0,80785
-0,86	0,19489	0,80511
-0,85	0,19766	0,80234
-0,84	0,20045	0,79955
-0,83	0,20327	0,79673
-0,82	0,20611	0,79389
-0,81	0,20897	0,79103
-0,80	0,21186	0,78814
-0,79	0,21476	0,78524
-0,78	0,21770	0,78230
-0,77	0,22065	0,77935
-0,76	0,22363	0,77637
-0,75	0,22663	0,77337
-0,74	0,22965	0,77035
-0,73	0,23270	0,76730
-0,72	0,23576	0,76424
-0,71	0,23885	0,76115
-0,70	0,24196	0,75804
-0,69	0,24510	0,75490

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-0,68	0,24825	0,75175
-0,67	0,25143	0,74857
-0,66	0,25463	0,74537
-0,65	0,25785	0,74215
-0,64	0,26109	0,73891
-0,63	0,26435	0,73565
-0,62	0,26763	0,73237
-0,61	0,27093	0,72907
-0,60	0,27425	0,72575
-0,59	0,27760	0,72240
-0,58	0,28096	0,71904
-0,57	0,28434	0,71566
-0,56	0,28774	0,71226
-0,55	0,29116	0,70884
-0,54	0,29460	0,70540
-0,53	0,29806	0,70194
-0,52	0,30153	0,69847
-0,51	0,30503	0,69497
-0,50	0,30854	0,69146
-0,49	0,31207	0,68793
-0,48	0,31561	0,68439
-0,47	0,31918	0,68082
-0,46	0,32276	0,67724
-0,45	0,32636	0,67364
-0,44	0,32997	0,67003
-0,43	0,33360	0,66640
-0,42	0,33724	0,66276
-0,41	0,34090	0,65910
-0,40	0,34458	0,65542
-0,39	0,34827	0,65173
-0,38	0,35197	0,64803
-0,37	0,35569	0,64431
-0,36	0,35942	0,64058
-0,35	0,36317	0,63683
-0,34	0,36693	0,63307
-0,33	0,37070	0,62930
-0,32	0,37448	0,62552
-0,31	0,37828	0,62172
-0,30	0,38209	0,61791
-0,29	0,38591	0,61409
-0,28	0,38974	0,61026
-0,27	0,39358	0,60642
-0,26	0,39743	0,60257

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
-0,25	0,40129	0,59871
-0,24	0,40517	0,59483
-0,23	0,40905	0,59095
-0,22	0,41294	0,58706
-0,21	0,41683	0,58317
-0,20	0,42074	0,57926
-0,19	0,42465	0,57535
-0,18	0,42858	0,57142
-0,17	0,43251	0,56749
-0,16	0,43644	0,56356
-0,15	0,44038	0,55962
-0,14	0,44433	0,55567
-0,13	0,44828	0,55172
-0,12	0,45224	0,54776
-0,11	0,45620	0,54380
-0,10	0,46017	0,53983
-0,09	0,46414	0,53586
-0,08	0,46812	0,53188
-0,07	0,47210	0,52790
-0,06	0,47608	0,52392
-0,05	0,48006	0,51994
-0,04	0,48405	0,51595
-0,03	0,48803	0,51197
-0,02	0,49202	0,50798
-0,01	0,49601	0,50399
0,00	0,50000	0,50000
0,01	0,50399	0,49601
0,02	0,50798	0,49202
0,03	0,51197	0,48803
0,04	0,51595	0,48405
0,05	0,51994	0,48006
0,06	0,52392	0,47608
0,07	0,52790	0,47210
0,08	0,53188	0,46812
0,09	0,53586	0,46414
0,10	0,53983	0,46017
0,11	0,54380	0,45620
0,12	0,54776	0,45224
0,13	0,55172	0,44828
0,14	0,55567	0,44433
0,15	0,55962	0,44038
0,16	0,56356	0,43644
0,17	0,56749	0,43251

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
0,18	0,57142	0,42858
0,19	0,57535	0,42465
0,20	0,57926	0,42074
0,21	0,58317	0,41683
0,22	0,58706	0,41294
0,23	0,59095	0,40905
0,24	0,59483	0,40517
0,25	0,59871	0,40129
0,26	0,60257	0,39743
0,27	0,60642	0,39358
0,28	0,61026	0,38974
0,29	0,61409	0,38591
0,30	0,61791	0,38209
0,31	0,62172	0,37828
0,32	0,62552	0,37448
0,33	0,62930	0,37070
0,34	0,63307	0,36693
0,35	0,63683	0,36317
0,36	0,64058	0,35942
0,37	0,64431	0,35569
0,38	0,64803	0,35197
0,39	0,65173	0,34827
0,40	0,65542	0,34458
0,41	0,65910	0,34090
0,42	0,66276	0,33724
0,43	0,66640	0,33360
0,44	0,67003	0,32997
0,45	0,67364	0,32636
0,46	0,67724	0,32276
0,47	0,68082	0,31918
0,48	0,68439	0,31561
0,49	0,68793	0,31207
0,50	0,69146	0,30854
0,51	0,69497	0,30503
0,52	0,69847	0,30153
0,53	0,70194	0,29806
0,54	0,70540	0,29460
0,55	0,70884	0,29116
0,56	0,71226	0,28774
0,57	0,71566	0,28434
0,58	0,71904	0,28096
0,59	0,72240	0,27760
0,60	0,72575	0,27425

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
0,61	0,72907	0,27093
0,62	0,73237	0,26763
0,63	0,73565	0,26435
0,64	0,73891	0,26109
0,65	0,74215	0,25785
0,66	0,74537	0,25463
0,67	0,74857	0,25143
0,68	0,75175	0,24825
0,69	0,75490	0,24510
0,70	0,75804	0,24196
0,71	0,76115	0,23885
0,72	0,76424	0,23576
0,73	0,76730	0,23270
0,74	0,77035	0,22965
0,75	0,77337	0,22663
0,76	0,77637	0,22363
0,77	0,77935	0,22065
0,78	0,78230	0,21770
0,79	0,78524	0,21476
0,80	0,78814	0,21186
0,81	0,79103	0,20897
0,82	0,79389	0,20611
0,83	0,79673	0,20327
0,84	0,79955	0,20045
0,85	0,80234	0,19766
0,86	0,80511	0,19489
0,87	0,80785	0,19215
0,88	0,81057	0,18943
0,89	0,81327	0,18673
0,90	0,81594	0,18406
0,91	0,81859	0,18141
0,92	0,82121	0,17879
0,93	0,82381	0,17619
0,94	0,82639	0,17361
0,95	0,82894	0,17106
0,96	0,83147	0,16853
0,97	0,83398	0,16602
0,98	0,83646	0,16354
0,99	0,83891	0,16109
1,00	0,84134	0,15866
1,01	0,84375	0,15625
1,02	0,84614	0,15386
1,03	0,84849	0,15151

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
1,04	0,85083	0,14917
1,05	0,85314	0,14686
1,06	0,85543	0,14457
1,07	0,85769	0,14231
1,08	0,85993	0,14007
1,09	0,86214	0,13786
1,10	0,86433	0,13567
1,11	0,86650	0,13350
1,12	0,86864	0,13136
1,13	0,87076	0,12924
1,14	0,87286	0,12714
1,15	0,87493	0,12507
1,16	0,87698	0,12302
1,17	0,87900	0,12100
1,18	0,88100	0,11900
1,19	0,88298	0,11702
1,20	0,88493	0,11507
1,21	0,88686	0,11314
1,22	0,88877	0,11123
1,23	0,89065	0,10935
1,24	0,89251	0,10749
1,25	0,89435	0,10565
1,26	0,89617	0,10383
1,27	0,89796	0,10204
1,28	0,89973	0,10027
1,29	0,90147	0,09853
1,30	0,90320	0,09680
1,31	0,90490	0,09510
1,32	0,90658	0,09342
1,33	0,90824	0,09176
1,34	0,90988	0,09012
1,35	0,91149	0,08851
1,36	0,91309	0,08691
1,37	0,91466	0,08534
1,38	0,91621	0,08379
1,39	0,91774	0,08226
1,40	0,91924	0,08076
1,41	0,92073	0,07927
1,42	0,92220	0,07780
1,43	0,92364	0,07636
1,44	0,92507	0,07493
1,45	0,92647	0,07353
1,46	0,92785	0,07215

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
1,47	0,92922	0,07078
1,48	0,93056	0,06944
1,49	0,93189	0,06811
1,50	0,93319	0,06681
1,51	0,93448	0,06552
1,52	0,93574	0,06426
1,53	0,93699	0,06301
1,54	0,93822	0,06178
1,55	0,93943	0,06057
1,56	0,94062	0,05938
1,57	0,94179	0,05821
1,58	0,94295	0,05705
1,59	0,94408	0,05592
1,60	0,94520	0,05480
1,61	0,94630	0,05370
1,62	0,94738	0,05262
1,63	0,94845	0,05155
1,64	0,94950	0,05050
1,65	0,95053	0,04947
1,66	0,95154	0,04846
1,67	0,95254	0,04746
1,68	0,95352	0,04648
1,69	0,95449	0,04551
1,70	0,95543	0,04457
1,71	0,95637	0,04363
1,72	0,95728	0,04272
1,73	0,95818	0,04182
1,74	0,95907	0,04093
1,75	0,95994	0,04006
1,76	0,96080	0,03920
1,77	0,96164	0,03836
1,78	0,96246	0,03754
1,79	0,96327	0,03673
1,80	0,96407	0,03593
1,81	0,96485	0,03515
1,82	0,96562	0,03438
1,83	0,96638	0,03362
1,84	0,96712	0,03288
1,85	0,96784	0,03216
1,86	0,96856	0,03144
1,87	0,96926	0,03074
1,88	0,96995	0,03005
1,89	0,97062	0,02938

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
1,90	0,97128	0,02872
1,91	0,97193	0,02807
1,92	0,97257	0,02743
1,93	0,97320	0,02680
1,94	0,97381	0,02619
1,95	0,97441	0,02559
1,96	0,97500	0,02500
1,97	0,97558	0,02442
1,98	0,97615	0,02385
1,99	0,97670	0,02330
2,00	0,97725	0,02275
2,01	0,97778	0,02222
2,02	0,97831	0,02169
2,03	0,97882	0,02118
2,04	0,97932	0,02068
2,05	0,97982	0,02018
2,06	0,98030	0,01970
2,07	0,98077	0,01923
2,08	0,98124	0,01876
2,09	0,98169	0,01831
2,10	0,98214	0,01786
2,11	0,98257	0,01743
2,12	0,98300	0,01700
2,13	0,98341	0,01659
2,14	0,98382	0,01618
2,15	0,98422	0,01578
2,16	0,98461	0,01539
2,17	0,98500	0,01500
2,18	0,98537	0,01463
2,19	0,98574	0,01426
2,20	0,98610	0,01390
2,21	0,98645	0,01355
2,22	0,98679	0,01321
2,23	0,98713	0,01287
2,24	0,98745	0,01255
2,25	0,98778	0,01222
2,26	0,98809	0,01191
2,27	0,98840	0,01160
2,28	0,98870	0,01130
2,29	0,98899	0,01101
2,30	0,98928	0,01072
2,31	0,98956	0,01044
2,32	0,98983	0,01017

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
2,33	0,99010	0,00990
2,34	0,99036	0,00964
2,35	0,99061	0,00939
2,36	0,99086	0,00914
2,37	0,99111	0,00889
2,38	0,99134	0,00866
2,39	0,99158	0,00842
2,40	0,99180	0,00820
2,41	0,99202	0,00798
2,42	0,99224	0,00776
2,43	0,99245	0,00755
2,44	0,99266	0,00734
2,45	0,99286	0,00714
2,46	0,99305	0,00695
2,47	0,99324	0,00676
2,48	0,99343	0,00657
2,49	0,99361	0,00639
2,50	0,99379	0,00621
2,51	0,99396	0,00604
2,52	0,99413	0,00587
2,53	0,99430	0,00570
2,54	0,99446	0,00554
2,55	0,99461	0,00539
2,56	0,99477	0,00523
2,57	0,99492	0,00508
2,58	0,99506	0,00494
2,59	0,99520	0,00480
2,60	0,99534	0,00466
2,61	0,99547	0,00453
2,62	0,99560	0,00440
2,63	0,99573	0,00427
2,64	0,99585	0,00415
2,65	0,99598	0,00402
2,66	0,99609	0,00391
2,67	0,99621	0,00379
2,68	0,99632	0,00368
2,69	0,99643	0,00357
2,70	0,99653	0,00347
2,71	0,99664	0,00336
2,72	0,99674	0,00326
2,73	0,99683	0,00317
2,74	0,99693	0,00307
2,75	0,99702	0,00298

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
2,76	0,99711	0,00289
2,77	0,99720	0,00280
2,78	0,99728	0,00272
2,79	0,99736	0,00264
2,80	0,99744	0,00256
2,81	0,99752	0,00248
2,82	0,99760	0,00240
2,83	0,99767	0,00233
2,84	0,99774	0,00226
2,85	0,99781	0,00219
2,86	0,99788	0,00212
2,87	0,99795	0,00205
2,88	0,99801	0,00199
2,89	0,99807	0,00193
2,90	0,99813	0,00187
2,91	0,99819	0,00181
2,92	0,99825	0,00175
2,93	0,99831	0,00169
2,94	0,99836	0,00164
2,95	0,99841	0,00159
2,96	0,99846	0,00154
2,97	0,99851	0,00149
2,98	0,99856	0,00144
2,99	0,99861	0,00139
3,00	0,99865	0,00135
3,01	0,99869	0,00131
3,02	0,99874	0,00126
3,03	0,99878	0,00122
3,04	0,99882	0,00118
3,05	0,99886	0,00114
3,06	0,99889	0,00111
3,07	0,99893	0,00107
3,08	0,99896	0,00104
3,09	0,99900	0,00100
3,10	0,99903	0,00097
3,11	0,99906	0,00094
3,12	0,99910	0,00090
3,13	0,99913	0,00087
3,14	0,99916	0,00084
3,15	0,99918	0,00082
3,16	0,99921	0,00079
3,17	0,99924	0,00076
3,18	0,99926	0,00074

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
3,19	0,99929	0,00071
3,20	0,99931	0,00069
3,21	0,99934	0,00066
3,22	0,99936	0,00064
3,23	0,99938	0,00062
3,24	0,99940	0,00060
3,25	0,99942	0,00058
3,26	0,99944	0,00056
3,27	0,99946	0,00054
3,28	0,99948	0,00052
3,29	0,99950	0,00050
3,30	0,99952	0,00048
3,31	0,99953	0,00047
3,32	0,99955	0,00045
3,33	0,99957	0,00043
3,34	0,99958	0,00042
3,35	0,99960	0,00040
3,36	0,99961	0,00039
3,37	0,99962	0,00038
3,38	0,99964	0,00036
3,39	0,99965	0,00035
3,40	0,99966	0,00034
3,41	0,99968	0,00032
3,42	0,99969	0,00031
3,43	0,99970	0,00030
3,44	0,99971	0,00029
3,45	0,99972	0,00028
3,46	0,99973	0,00027
3,47	0,99974	0,00026
3,48	0,99975	0,00025
3,49	0,99976	0,00024
3,50	0,99977	0,00023
3,51	0,99978	0,00022
3,52	0,99978	0,00022
3,53	0,99979	0,00021
3,54	0,99980	0,00020
3,55	0,99981	0,00019
3,56	0,99981	0,00019
3,57	0,99982	0,00018
3,58	0,99983	0,00017
3,59	0,99983	0,00017
3,60	0,99984	0,00016
3,61	0,99985	0,00015

z	$\Phi(z)$	$1-\Phi(z)$
3,62	0,99985	0,00015
3,63	0,99986	0,00014
3,64	0,99986	0,00014
3,65	0,99987	0,00013
3,66	0,99987	0,00013
3,67	0,99988	0,00012
3,68	0,99988	0,00012
3,69	0,99989	0,00011
3,70	0,99989	0,00011
3,71	0,99990	0,00010
3,72	0,99990	0,00010
3,73	0,99990	0,00010
3,74	0,99991	0,00009
3,75	0,99991	0,00009
3,76	0,99992	0,00008
3,77	0,99992	0,00008
3,78	0,99992	0,00008
3,79	0,99992	0,00008
3,80	0,99993	0,00007
3,81	0,99993	0,00007
3,82	0,99993	0,00007
3,83	0,99994	0,00006
3,84	0,99994	0,00006
3,85	0,99994	0,00006
3,86	0,99994	0,00006
3,87	0,99995	0,00005
3,88	0,99995	0,00005
3,89	0,99995	0,00005
3,90	0,99995	0,00005
3,91	0,99995	0,00005
3,92	0,99996	0,00004
3,93	0,99996	0,00004
3,94	0,99996	0,00004
3,95	0,99996	0,00004
3,96	0,99996	0,00004
3,97	0,99996	0,00004
3,98	0,99997	0,00003
3,99	0,99997	0,00003
4,00	0,99997	0,00003

Priloga 3: Funkcija gama $\Gamma(x)$

Tabela z vrednostmi funkcije gama $\Gamma(x)$.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,01	0,9943	1,40	0,8873	1,79	0,9288	2,18	1,0900	2,57	1,3981	2,96	1,9281
1,02	0,9888	1,41	0,8868	1,80	0,9314	2,19	1,0959	2,58	1,4084	2,97	1,9457
1,03	0,9835	1,42	0,8864	1,81	0,9341	2,20	1,1018	2,59	1,4190	2,98	1,9636
1,04	0,9784	1,43	0,8860	1,82	0,9368	2,21	1,1078	2,60	1,4296	2,99	1,9817
1,05	0,9735	1,44	0,8858	1,83	0,9397	2,22	1,1140	2,61	1,4404	3,00	2,0000
1,06	0,9687	1,45	0,8857	1,84	0,9426	2,23	1,1202	2,62	1,4514		
1,07	0,9642	1,46	0,8856	1,85	0,9456	2,24	1,1266	2,63	1,4625		
1,08	0,9597	1,47	0,8856	1,86	0,9487	2,25	1,1330	2,64	1,4738		
1,09	0,9555	1,48	0,8857	1,87	0,9518	2,26	1,1395	2,65	1,4852		
1,10	0,9514	1,49	0,8859	1,88	0,9551	2,27	1,1462	2,66	1,4968		
1,11	0,9474	1,50	0,8862	1,89	0,9584	2,28	1,1529	2,67	1,5085		
1,12	0,9436	1,51	0,8866	1,90	0,9618	2,29	1,1598	2,68	1,5204		
1,13	0,9399	1,52	0,8870	1,91	0,9652	2,30	1,1667	2,69	1,5325		
1,14	0,9364	1,53	0,8876	1,92	0,9688	2,31	1,1738	2,70	1,5447		
1,15	0,9330	1,54	0,8882	1,93	0,9724	2,32	1,1809	2,71	1,5571		
1,16	0,9298	1,55	0,8889	1,94	0,9761	2,33	1,1882	2,72	1,5696		
1,17	0,9267	1,56	0,8896	1,95	0,9799	2,34	1,1956	2,73	1,5824		
1,18	0,9237	1,57	0,8905	1,96	0,9837	2,35	1,2031	2,74	1,5953		
1,19	0,9209	1,58	0,8914	1,97	0,9877	2,36	1,2107	2,75	1,6084		
1,20	0,9182	1,59	0,8924	1,98	0,9917	2,37	1,2184	2,76	1,6216		
1,21	0,9156	1,60	0,8935	1,99	0,9958	2,38	1,2262	2,77	1,6351		
1,22	0,9131	1,61	0,8947	2,00	1,0000	2,39	1,2341	2,78	1,6487		
1,23	0,9108	1,62	0,8959	2,01	1,0043	2,40	1,2422	2,79	1,6625		
1,24	0,9085	1,63	0,8972	2,02	1,0086	2,41	1,2503	2,80	1,6765		
1,25	0,9064	1,64	0,8986	2,03	1,0131	2,42	1,2586	2,81	1,6907		
1,26	0,9044	1,65	0,9001	2,04	1,0176	2,43	1,2670	2,82	1,7051		
1,27	0,9025	1,66	0,9017	2,05	1,0222	2,44	1,2756	2,83	1,7196		
1,28	0,9007	1,67	0,9033	2,06	1,0269	2,45	1,2842	2,84	1,7344		
1,29	0,8990	1,68	0,9050	2,07	1,0316	2,46	1,2930	2,85	1,7494		
1,30	0,8975	1,69	0,9068	2,08	1,0365	2,47	1,3019	2,86	1,7646		
1,31	0,8960	1,70	0,9086	2,09	1,0415	2,48	1,3109	2,87	1,7799		
1,32	0,8946	1,71	0,9106	2,10	1,0465	2,49	1,3201	2,88	1,7955		
1,33	0,8934	1,72	0,9126	2,11	1,0516	2,50	1,3293	2,89	1,8113		
1,34	0,8922	1,73	0,9147	2,12	1,0568	2,51	1,3388	2,90	1,8274		
1,35	0,8912	1,74	0,9168	2,13	1,0621	2,52	1,3483	2,91	1,8436		
1,36	0,8902	1,75	0,9191	2,14	1,0675	2,53	1,3580	2,92	1,8600		
1,37	0,8893	1,76	0,9214	2,15	1,0730	2,54	1,3678	2,93	1,8767		
1,38	0,8885	1,77	0,9238	2,16	1,0786	2,55	1,3777	2,94	1,8936		
1,39	0,8879	1,78	0,9262	2,17	1,0842	2,56	1,3878	2,95	1,9108		

Priloga 4: Pravila za računanje s funkcijo gama $\boldsymbol{\Gamma(x)}$

Pravila za računanje s funkcijo gama $\Gamma(x)$ (Eulerjev integral druge vrste) [26].

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{za } x > 0$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+n)}$$

S pripadajočimi lastnostmi:

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$ za $n = 0,1,2,\ldots$
3. $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\cdot x)}$ za $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$
5. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\cdot n)!\cdot\sqrt{\pi}}{n!\cdot 2^{2\cdot n}}$ za $n = 0,1,2,\ldots$
6. $\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^{2\cdot n}\cdot\sqrt{\pi}}{(2\cdot n)!}$ za $n = 0,1,2,\ldots$

UNIVERZA V LJUBLJANI | FS Fakulteta za strojništvo

Aleš Gosar, Simon Oman, Jernej Klemenc, Marko Nagode

Konstruiranje naprednih sistemov

© Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2026

Avtorske pravice pridržane. Gradiva iz publikacije ni dovoljeno kopirati, objavljati ali prevajati v druge jezike brez pisnega dovoljenja založbe.

ISBN 978-961-7187-33-5

9789617187335