

# ANALIZA IN LINEARNA ALGEBRA - PAP

## UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

<b>Predmet:</b>	Analiza in linearna algebra - PAP
<b>Course title:</b>	Analysis and Linear Algebra - PAP
<b>Članica nosilka/UL Member:</b>	UL FS

<b>Študijski programi in stopnja</b>	<b>Študijska smer</b>	<b>Letnik</b>	<b>Semestri</b>	<b>Izbirnost</b>
Strojništvo - projektno aplikativni program, prva stopnja, visokošolski strokovni (od študijskega leta 2025/2026 dalje)	Ni členitve (študijski program)	1. letnik	1. semester	obvezni

<b>Univerzitetna koda predmeta/University course code:</b>	0562656
<b>Koda učne enote na članici/UL Member course code:</b>	3001-V

<b>Predavanja /Lectures</b>	<b>Seminar /Seminar</b>	<b>Vaje /Tutorials</b>	<b>Klinične vaje /Clinical tutorials</b>	<b>Druge oblike študija /Other forms of study</b>	<b>Samostojno delo /Individual student work</b>	<b>ECTS</b>
60		60			80	8

<b>Nosilec predmeta/Lecturer:</b>	Aljoša Peperko, Janez Žerovnik
-----------------------------------	--------------------------------

<b>Izvajalci predavanj:</b>	
<b>Izvajalci seminarjev:</b>	
<b>Izvajalci vaj:</b>	
<b>Izvajalci kliničnih vaj:</b>	
<b>Izvajalci drugih oblik:</b>	

**Izvajalci praktičnega usposabljanja:**

--

**Vrsta predmeta/Course type:**

Obvezni splošni predmet /Compulsory general course

**Jeziki/Languages:**

Predavanja/Lectures:

Slovenščina

Vaje/Tutorial:

Slovenščina

**Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:**

**Prerequisites:**

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Visokošolski strokovni študijski program I. stopnje Strojništvo - Projektno aplikativni program.

Meeting the enrollment conditions for the MECHANICAL ENGINEERING - Project Oriented Applied Programme.

**Vsebina:**

**Content (Syllabus outline):**

*Uvod in osnovni pojmi*

1. Matematika in matematično modeliranje.

Množice in števila. Kompleksna števila. Polarni zapis kompleksnega števila.

*Realne funkcije realne spremenljivke in odvod*

2. Realne funkcije.

- Elementarne funkcije. Limita funkcije. Zvezne funkcije. Osnovne lastnosti zveznih funkcij. Definicija in geometrijski pomen odvoda.  
- Diferencial.

3. Pravila za odvajanje. Odvodi elementarnih funkcij. Izreki o odvedljivih funkcijah: Rolleov, Lagrangeov in Cauchyjev izrek. L'Hopitalovo pravilo.

4. Odvodi višjega reda.

- Taylorjeva formula

5. a) Lokalni ekstremini realne funkcije. Stacionarne točke odvedljive funkcije.

Analiza lastnosti funkcij s pomočjo odvoda in drugega odvoda.

- Risanje grafov funkcij. Uporaba odvoda.

*Nedoločeni in določeni integral*

6. Definicija določenega in nedoločenega integrala.

*Introduction and basics*

1. Mathematics and mathematical modelling.

Sets and numbers. Complex numbers. Polar form of a complex number.

*Real functions of real variables and differentiation*

2. Functions.

- Elementary functions. Limit of a function. Continuous functions. Basic properties of continuous functions. Definition of derivative and its geometrical meaning.

- Differential.

3. Rules for differentiation. Derivates of elementary functions. Theorems for differential functions. Rolle, Lagrange and Cauchy. L'Hopital rule.

4. Derivates of higher order.

- Taylor formula.

5. a) Local extremes of a real function. Stationary points of differentiable functions.

Property analysis of functions via the first and second and derivates.

- Drawing graphs of functions.

Applications of derivate.

*Indefinite and definite integral*

<p>Lastnosti integrala.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Osnovni izrek analize. Integrali nekaterih elementarnih funkcij. Osnovne metode integriranja.</li> </ul> <p>7. Vpeljava nove spremenljivke. Integracija po delih.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Zgledi integriranja racionalnih in kotnih funkcij.</li> </ul> <p>8. (a) Posplošeni integral. Uporaba integrala: prostornine, ploščine izsekov (navor), težišča, itd.</p> <p>8.(b) <i>Realne funkcije dveh ali več realnih spremenljivk-osnove</i></p> <p>Definicija realne funkcije več spremenljivk.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Geometrijski in fizikalni zgledi. Limita in zveznost.</li> </ul> <p>9. (a) Parcialni odvodi funkcij dveh in več spremenljivk</p> <p>9. (b) Koordinatni sistem v prostoru (kartezične, polarne, sferične, valjaste, naravne koordinate), razdalja.</p> <p>10. Definicija vektorja. Osnovne operacije v brezkoordinatnem in koordinatnem zapisu.</p> <p>Standardna ortonormirana baza.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Linearna neodvisnost vektorjev in baza prostora. Skalarni produkt.</li> </ul> <p>11. Vektorski produkt. Osnovne lastnosti produktov. Fizikalni pomen produktov in uporaba za računanje kotov, navorov, ploščin. Gradient funkcije dveh in treh spremenljivk, smer najhitrejšega naraščanja. Mešani produkt, determinante reda 3, prostornine.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dvakratni vektorski produkt.</li> </ul> <p>12. Enačbi ravnine in premice v prostoru.</p> <p>Uporaba enačb ravnine in premice za računanje razdalj med geometrijskimi objekti (razdalja med točko in premico, med točko in ravnino, med dvema premicama) in za reševanje drugih geometrijskih nalog. Tangentna ravnina na graf funkcije dveh spremenljivk in diferencial.</p> <p>13. Matrike in osnovne operacije.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Seštevanje matrik, množenje matrike s</li> </ul>	<p>6. Definition of definite and indefinite integral.</p> <p>Properties of integral.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fundamental theorem of analysis.</li> </ul> <p>Integrals of elementary functions. Basic methods of integration.</p> <p>7. Substitution.</p> <p>Per partes integration.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Examples of integration of rational and trigonometric functions.</li> </ul> <p>8. (a) Improper integral. Applications of integral: volumes, plates, torque, center of gravity.</p> <p>8. (b) <i>Real functions of two or several real variables.</i></p> <p>Definition of a real function of several variables. Geometrical in physical examples. Limit and continuity.</p> <p>9.(a) Partial derivatives of functions of two and three variables</p> <p>9(b)Coordinate system in Euclidean space (Cartesian, polar, spherical, natural coordinates). Euclidean metric</p> <p>10. Definition of vectors. Basic operations in coordinate and noncoordinate form.</p> <p>Standard orthonormed basis.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Linear independence of vectors and basis of space. Scalar product.</li> </ul> <p>11. Vector product. Basic properties of the products. Physical meaning of the products and applications for calculation of angles, torque, volumes. Gradient of functions of two and three variables, direction of fastest growth. Mixed product, determinants of order 3, volumes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Double vector product.</li> </ul> <p>12. Equations of planes and lines in the Euclidean space. Applications of these equations for calculation of distances between geometrical objects (a point and a line, a point and a plane, two lines) and for solving other geometric assignments. Tangent plane for functions of two variables and differential.</p>
---	---

<p>številom, množenje matrik.  Determinante. Osnovne lastnosti determinante. Inverzne matrike.  - Karakterizacija obrnljivih matrik.</p> <p>14. Reševanje matričnih enačb. Sistemi linearnih enačb. Zapis sistema enačb v obliki matrične enačbe.  Gaussov postopek.  - Analiza rešljivosti sistema enačb.  Računanje inverzne matrike z Gaussovim postopkom.</p> <p>15. Cramerjev izrek o rešitvah enolično rešljivega sistema linearnih enačb.  - Lastni vektorji in lastne vrednosti matrik.  - Metoda za računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev.</p>	<p>13. Matrices and basic operations  - Summation of matrices, multiplication with a scalar, multiplication of matrices. Determinants. Basic properties of determinants. Invertible matrices.  - Characterization of invertible matrices.</p> <p>14. Solving matrix equations. Systems of linear equations. Linear systems written in the form of a matrix equation. Gauss algorithm.  - Analysis of solvability of linear systems. Gauss algorithm for calculating the inverse matrix.</p> <p>15. Cramer rule.  -Eigenvectors and eigenvalues of matrices.  - Method of calculation of eigenvalues and eigenvectors.</p>
--	---

### Temeljna literatura in viri/Readings:

1. ŽEROVNIK, Janez, GABROVŠEK, Boštjan, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Analiza*. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 202 258 str., graf. prikazi. ISBN 978-961-6980-79-1. [COBISS.SI-ID [74551299](#)]
2. ŽEROVNIK, Janez, NOVAK, Tina, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Navadne diferencialne enačbe in linearna algebra*. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 202 VIII, 209 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-85-2. [COBISS.SI-ID [95247107](#)]
3. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Tehniška matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2015. COBISS.SI-ID [281515776](#)]
4. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Tehniška matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2019. [COBISS.SI-ID [298792960](#)]
5. E. KREYSZIG, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 9th Edition, 2006 [COBISS.SI-ID [69008385](#)]

### Cilji in kompetence:

- Cilji:
1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij analize, integralskih transformacij in Fourierove analize.
  2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev nekaterih fizikalnih in tehniških problemov

### Objectives and competences:

- Objectives:
1. Students learn theoretical basis of calculus, integral transformations and Fourier analysis.
  2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some physical and engineering problems.
- Competences:
1. The ability to apply the obtained

<p><b>Kompetence:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij analize in integralskih transformacij in Fourierove analize za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-PAP, S2-PAP, S6-PAP, S4-PAP, S5-PAP, P2-PAP)</li> <li>2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (S5-PAP, S1-PAP, S2-PAP, S6-PAP, P2-PAP).</li> </ol>	<p>mathematical knowledge of calculus, integral transformations and Fourier analysis for analysis, modelling, and solving of mechanical engineering problems (S1-PAP, S2-PAP, S6-PAP, S4-PAP, S5-PAP, P2-PAP)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (S5-PAP, S1-PAP, S2-PAP, S6-PAP, P2-PAP).</li> </ol>
--	---

### **Predvideni študijski rezultati:**

<p><b>Znanja:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Obvladajo osnovne metode analize, integralskih transformacij in Fourierove analize (Z1).</li> <li>• Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1).</li> </ul> <p><b>Spretnosti:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno zahtevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>• Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>	<p><b>Knowledge:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mastering the basic methods of calculus, integral transformations and Fourier analysis (Z1).</li> <li>• Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1).</li> </ul> <p><b>Skills:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>• Solid skill of analytic thinking and analitic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>
---	---

### **Metode poučevanja in učenja:**

<p>P1 Avditorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.</p> <p>P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.</p> <p>P3 Avditorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepi z računskimi primeri.</p>	<p><b>Learning and teaching methods:</b></p> <p>P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied use cases.</p> <p>P2 Presenting the content according to the explained system.</p> <p>P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.</p> <p>P12 Individualised homeworks in a web classroom.</p>
---	--

P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici. (Digitalno preverjanje domačih nalog)	(Digital validation of homeworks)
--	-----------------------------------

Načini ocenjevanja:	Delež/ Weight	Assessment:
Izpit - računski del (delni izpiti ali izpit ob koncu semestra).	80,00 %	Exam - calculating part (partial exams or final exam).
Izpit - teoretični del (delni izpiti ali izpit ob koncu semestra).	20,00 %	Exam - theoretical part (partial exams or final exam).

Ocenjevalna lestvica:	Grading system:
5 - 10, pri čemer velja, da je pozitivna ocena od 6 - 10	5 - 10, a student passes the exam if he is graded from 6 to 10

#### Reference nosilca/Lecturer's references:

##### Janez Žerovnik:

1. WITKOWSKI, Rafał, **ŽEROVNIK, Janez**. Proof of McDiarmid-Reed conjecture for a subclass of hexagonal graphs. *Utilitas mathematica*, ISSN 0315-3681, 2017, vol. 105, str. 191-206. [COBISS.SI-ID [18603097](#)]
2. ŠPARL, Petra, WITKOWSKI, Rafał, **ŽEROVNIK, Janez**. Multicoloring of cannonball graphs. *Ars mathematica contemporanea*, ISSN 1855-3966. [Tiskana izd.], 2016, vol. 10, no. 1, str. 31-44. [COBISS.SI-ID [7410707](#)]
3. RUPNIK POKLUKAR, Darja, **ŽEROVNIK, Janez**. Reliability Hosoya-Wiener polynomial of double weighted trees. *Fundamenta informaticae*, ISSN 0169-2968, 2016, vol. 147, str. 447-456,. [COBISS.SI-ID [15186971](#)]
4. KALJUN, David, PETRIŠIČ, Jože, **ŽEROVNIK, Janez**. Using Newton's method to model the spatial light distribution of an LED with attached secondary optics. *Strojniški vestnik*, ISSN 0039-2480, May 2016, vol. 62, no. 5, str. 307-317. [COBISS.SI-ID [14635035](#)]
5. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Improved upper bounds for vertex and edge fault diameters of Cartesian graph bundles. *Discrete applied mathematics*, ISSN 0166-218X. [Print ed.], 30 Jan. 2015, vol. 181, str. 90-97. [COBISS.SI-ID [18123542](#)]

##### Aljoša Peperko:

1. ROSENMAN, Amnon, LEHNER, Franz, **PEPERKO, Aljoša**. Polynomial convolutions in max-plus algebra. *Linear algebra and its applications*. [Print ed.]. Oct. 2019, vol. 578, str. 370-401. ISSN 0024-3795. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.05.020>, DOI: [10.1016/j.laa.2019.05.020](https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.05.020). [COBISS.SI-ID [18650969](#)]
2. DRNOVŠEK, Roman, **PEPERKO, Aljoša**. Inequalities on the spectral radius and the operator norm of Hadamard products of positive operators on sequence spaces. *Banach journal of mathematical analysis : an international electronic journal*, ISSN 1735-8787. [Online ed.], 2016, vol. 10, no. 4, str. 800-814.

[COBISS.SI-ID [17771865](#)]

3. GABROVŠEK, Boštjan, **PEPERKO, Aljoša**, ŽEROVNIK, Janez. On the 2-rainbow independent domination numbers of some graphs. *Central European journal of operations research*. Sept. 2023, vol. 31, iss. 3, str. 817-831. ISSN 1435-246X. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10100-023-00840-w>, <https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=148033>, DOI: [10.1007/s10100-023-00840-w](https://doi.org/10.1007/s10100-023-00840-w). [COBISS.SI-ID [142159107](#)]
4. ŽUŽEK, Tena, **PEPERKO, Aljoša**, KUŠAR, Janez. A max-plus algebra approach for generating a non-delay schedule. Croatian operational research review : CRORR, ISSN 1848-0225. [Tiskana izd.], 2019, vol. 10, no. 1, str. 35-44 [COBISS.SI-ID [16696091](#)]
5. ŠFILIGOJ, Tina, **PEPERKO, Aljoša**. Estimating node importance in public transport network. V: DROBNE, Samo (ur.), et al. *SOR '23 : proceedings of the 17th International Symposium on Operational Research in Slovenia : Bled, Slovenia, September 20-22, 2023*. 1st electronic version. Ljubljana: Slovenian Society Informatika - Section for Operational Research, 2023. Str. 379-382, ilustr. ISBN 978-961-6165-61-7. <https://drustvo-informatika.si/uploads/documents/6a1c2595-7d3f-4dd2-ab6c-9ed9b168c19d//SOR23Proceedings.pdf>. [COBISS.SI-ID [166038019](#)]