

ANALIZA IN NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

Predmet:	Analiza in navadne diferencialne enačbe
Course title:	Calculus and ordinary differential equations
Članica nosilka/UL Member:	UL FS

Študijski programi in stopnja	Študijska smer	Letnik	Semestri	Izbirnost
Strojništvo - razvojno raziskovalni program, prva stopnja, univerzitetni (od študijskega leta 2024/2025 dalje)	Ni členitve (študijski program)	1. letnik	1. semester	obvezni

Univerzitetna koda predmeta/University course code:	0562738
Koda učne enote na članici/UL Member course code:	2001-U

Predavanja /Lectures	Seminar /Seminar	Vaje /Tutorials	Klinične vaje /Clinical tutorials	Druge oblike študija /Other forms of study	Samostojno delo /Individual student work	ECTS
75		60			90	9

Nosilec predmeta/Lecturer:	Aljoša Peperko, Darja Rupnik Poklukar, Janez Žerovnik
-----------------------------------	---

Izvajalci predavanj:	
Izvajalci seminarjev:	
Izvajalci vaj:	
Izvajalci kliničnih vaj:	
Izvajalci drugih oblik:	
Izvajalci praktičnega usposabljanja:	

Vrsta predmeta/Course type:

Obvezni splošni predmet /Compulsory general course

Jeziki/Languages:

Predavanja/Lectures:

Slovenščina

Vaje/Tutorial:

Slovenščina

Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Univerzitetni študijski program I. stopnje Strojništvo - Razvojno raziskovalni program.

Prerequisites:

Meeting the enrollment conditions for the Academic study programme of Mechanical Engineering - Research and Development program.

Vsebina:

Uvod in osnovni pojmi
1. Matematika in matematično modeliranje.
- Korektnost in ustreznost modela.
Množice in števila. Kompleksna števila. Polarni zapis kompleksnega števila. Zaporedja in limita zaporedja. Številske vrste (realne in kompleksne). Konvergenčni kriteriji (primerjalni, kvocientni, korenski). Realne funkcije realne spremenljivke in odvod
2. Realne funkcije.
- Elementarne funkcije. Limita funkcije. Zvezne funkcije. Osnovne lastnosti zveznih funkcij. Definicija in geometrijski pomen odvoda. Diferencial. Pravila za odvajanje. Odvodi elementarnih funkcij.
3. Izreki o odvedljivih funkcijah.
- Rolleov, Lagrangeov in Cauchyjev izrek. L'Hopitalovo pravilo. Odvodi višjega reda. Taylorjeva formula. Taylorjeva vrsta analitične funkcije. Definicija pomembnih kompleksnih funkcij s pomočjo Taylorjevih vrst. Eulerjeva formula.
4. Lokalni ekstremini realne funkcije.
- Stacionarne točke odvedljive funkcije. Analiza lastnosti funkcij s pomočjo prvega in drugega odvoda. Risanje grafov funkcij. Uporaba odvoda.

Content (Syllabus outline):

Introduction and basics
1. Mathematics and mathematical modelling.
- Correctness and suitability of the model. Sets and numbers. Complex numbers. Polar form of a complex number. Sequences and a limit of a sequence. Number series (real and complex). Convergence tests (comparison, ratio, root). Real functions of real variables
2. Real functions.
- Elementary functions. Limit of a function. Continuous functions. Basic properties of continuous functions. Definition of derivative and its geometrical meaning. Differential. Rules for derivation. Derivates of elementary functions.
3. Theorems for differential functions.
- Rolle, Lagrange and Cauchy. L'Hopital rule. Derivates of higher order. Taylor formula. Taylor series of analytic functions. Definition of important complex functions with Taylor series. Euler formula.
4. Local extrema of a real function.
- Stationary points of differentiable functions. Property analysis of functions via the first and second and derivates. Drawing of graphs of functions. Applications of a derivate.

<p>Nedoločeni in določeni integral</p> <p>5. Definicija določenega in nedoločenega integrala.</p> <p>- Lastnosti integrala. Osnovni izrek analize. Nedoločeni integrali nekaterih elementarnih funkcij.</p> <p>6. Osnovne metode integriranja.</p> <p>- Vpeljava nove spremenljivke in integracija po delih. Posplošeni integral. Uporaba integrala: prostornine, ploščine izsekov (navor), težišča, itd.</p> <p>Realne funkcije dveh ali več realnih spremenljivk</p> <p>7. Definicija realne funkcije več spremenljivk.</p> <p>- Geometrijski in fizikalni primeri. Limita in zveznost. Parcialni odvodi. Gradient. Totalni diferencial. Tangentna ravnina.</p> <p>8. Višji parcialni odvodi.</p> <p>- Definicija in osnovne lastnosti. Definicija odvoda v poljubni smeri. Smerni odvod in gradient. Formula za odvajanje sestavljenih funkcij (verižno pravilo).</p> <p>9. Definicija lokalnega in globalnega ekstrema.</p> <p>- Klasifikacija lokalnih ekstremov za gladke funkcije več spremenljivk. Vezani ekstremi, Lagrangeova metoda.</p> <p>10. Izrek o implicitni funkciji.</p> <p>- Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta za funkcije več spremenljivk. Primeri uporabe za modeliranje nelinearnih problemov.</p> <p>Navadne diferencialne enačbe</p> <p>11. Osnovni pojmi.</p> <p>- Modeliranje z diferencialnimi enačbami. Primeri navadnih diferencialnih enačb. Cauchyjeva naloga. Grafična metoda. Enačba z ločljivima spremenljivkama. Metoda integrirajočih množiteljev.</p> <p>12. Linearne diferencialne enačbe 1.reda.</p> <p>- Homogene in nehomogene enačbe. Splošna metoda za reševanje linearne enačbe prvega reda. Bernoulijeva enačba. Aplikacije. Populacijska dinamika.</p> <p>13. Homogene linearne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.</p>	<p>Indefinite and definite integral</p> <p>5. Definition of definite and indefinite integral.</p> <p>- Properties of integral. Fundamental theorem of analysis. Indefinite integrals of elementary functions.</p> <p>6. Basic methods of integration.</p> <p>- Substitution and per partes integration. Improper integral. Applications of integral: volumes, plates, torque, center of gravity</p> <p>Real functions several real variables</p> <p>7. Definition of a real function of several variables.</p> <p>- Geometrical and physical examples. Limit and continuity. Partial derivatives. Gradient. Total differential. Tangent plane.</p> <p>8. Higher order partial derivatives.</p> <p>- Definition and basic properties. Definition of a derivate in arbitrary direction. Directional derivate and gradient. Chain rule.</p> <p>9. Definition of local and global extrema.</p> <p>- Classification of local extrema for smooth functions of several variables. Extrema under additional conditions, Lagrange method.</p> <p>10. Implicit function theorem.</p> <p>- Taylor formula and Taylor series for functions of several variables. Examples of application for modelling of nonlinear problems.</p> <p>Ordinary differential equations.</p> <p>11. Basics.</p> <p>- Modelling with differential equations. Examples of ordinary differential equations. Cauchy task. Graphical method. Separable ordinary differential equations. Integrating factors.</p> <p>12. Linear differential equations of first order.</p> <p>- Homogeneous and nonhomogeneous equations. General method for solving a linear differential equation of first order. Bernoulli equation. Applications. Population dynamics.</p> <p>13. Homeogenous linear differential equations of second order with constant coefficients.</p> <p>- Characteristic square equation.</p>
--	---

<p>- Karakteristična kvadratna enačba. Nehomogene linearne enačbe drugega reda. Primeri iz fizike in tehnike. Masno-vzmetni sistemi. Vsiljene oscilacije. Resonanca.</p> <p>14. Metode za reševanje nehomogenih linearnih diferencialnih enačb drugega reda.</p> <p>- Variacija konstant, metoda nedoločenih koeficientov. Euler-Cauchyjeve enačbe.</p> <p>15. Linearne diferencialne enačbe višjega reda.</p> <p>- Metode za zniževanje reda diferencialne enačbe. Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Reševanje posebnih homogenih enačb poljubnega reda.</p> <p>Opomba. Snov 9 in 10 tedna se lahko spredava na koncu semestra, če se pokaže potreba po zgodnejši obravnavi diferencialnih enačb zaradi sinhronizacije z drugimi predmeti.</p>	<p>Nonhomeogenous linear differential equations of second order. Examples from physics and engineering. Mass-spring systems. Forced oscillations. Resonance.</p> <p>14. Methods for solving nonhomeogenous linear differential equations of second order.</p> <p>- Variation of constants, unknown constants method. Euler-Cauchy equations.</p> <p>15. Linear differential equations of arbitrary finite order.</p> <p>- Linear differential equations with constant coefficients. Solving special homogeneous linear equations of arbitrary order.</p> <p>Remark. The material of week 9 and 10 can be moved to the end of the course if DE are needed earlier to be synchronized with other subjects of the program.</p>
---	---

Temeljna literatura in viri/Readings:

<ol style="list-style-type: none"> 1. ŽEROVNIK, Janez, GABROVŠEK, Boštjan, RUPNIK POKLUKAR, Darja. <i>Analiza in navadne diferencialne enačbe</i>. 1. ponatis 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2023. 284 str., graf. prikazi. ISBN 978-961-6980-80-7. [COBISS.SI-ID 162988035] 2. E. Kreyszig, <i>Advanced Engineering Mathematics</i>, 10th Edition, 2011, ISBN 978-0-470-64613-7 [COBISS.SI-ID 69008385] 3. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. <i>Matematika 1 : naloge in postopki reševanja</i>. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID 297341184] 4. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. <i>Matematika 2 : naloge in postopki reševanja</i>. 1. popravljena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 171 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-33-3. [COBISS.SI-ID 289166080] 5. PEPERKO, Aljoša, PERMAN, Mihael, RUPNIK POKLUKAR, Darja. <i>Matematika 3 : naloge in postopki reševanja</i>. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2020. 210 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-69-2. [COBISS.SI-ID 14594563] 6. MIZORI-OBLAK, Pavlina. <i>Matematika za študente tehnike in naravoslovja : prvi del</i>. Ponatis 6. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2009. ISBN 978-961-6536-30-1 [COBISS.SI-ID 248571648] 	
--	--

Cilji in kompetence:

Cilji:	Objectives and competences:
	Objectives:

<ol style="list-style-type: none"> 1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij analize in navadnih diferencialnih enačb. 2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev nekaterih fizikalnih in tehniških problemov <p>Kompetence:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij analize in navadnih diferencialnih enačb za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP) 2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP). 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Students learn theoretical basis from the fields of calculus and ordinary differential equations. 2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some physical and engineering problems. <p>Competences:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. The ability to apply the obtained mathematical knowledge of calculus and ordinary differential equations for modelling, solving and analysis professional technical problems from mechanical engineering (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP) 2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).
---	---

Predvideni študijski rezultati:

<p>Znanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Obvladajo metode osnovne analize in navadnih diferencialnih enačb (Z1). • Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1). <p>Spretnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno zahtevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4). • Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4). 	<p>Knowledge:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mastering the methods of basic calculus and ordinary differential equations (Z1). • Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1). <p>Skills:</p> <ul style="list-style-type: none"> • The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4). • Solid analytic skill of thinking and analitic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4).
--	--

Metode poučevanja in učenja:

<p>P1 Avditorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.</p>	<p>P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied problems.</p> <p>P2 Presenting the content according to</p>
---	--

Learning and teaching methods:

P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.	the explained system.
P3 Avditorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepi z računskimi primeri.	P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.
P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici	P12 Individualised homeworks in a web classroom.

Načini ocenjevanja:	Delež/ Weight	Assessment:
Pisni izpit.	80,00 %	Written exam.
Teoretični izpit.	20,00 %	Theoretical exam.

Ocenjevalna lestvica:	Grading system:
5 - 10, pri čemer velja, da je pozitivna ocena od 6 - 10	5 - 10, a student passes the exam if he is graded from 6 to 10

Reference nosilca/Lecturer's references:

Janez Žerovnik:

1. RUPNIK POKLUKAR, Darja, **ŽEROVNIK, Janez**. Networks with extremal closeness. Fundamenta informaticae. 2019, vol. 167, no. 3, str. 219-234, ilustr. ISSN 0169-2968. [COBISS.SI-ID [16652827](#)]
2. DENG, Fei, JIANG, Huiqin, LIU, Jia-Bao, RUPNIK POKLUKAR, Darja, SHAO, Zehui, WU, Pu, **ŽEROVNIK, Janez**. The Sanskruti index of trees and unicyclic graphs. Open chemistry. Jan. 2019, vol. 17, iss. 1, f. 448-455, ilustr. ISSN 2391-5420. [COBISS.SI-ID [16758043](#)]
3. KALJUN, David, **ŽEROVNIK, Janez**. Improving approximation by switching between two error functions. Croatian operational research review : CRORR. [Tiskana izd.]. 2017, vol. 8, nr. 1, str. 107-118, ilustr. ISSN 1848-0225. [COBISS.SI-ID [15504411](#)]
4. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed connectivity of Cartesian graph products and bundles. Ars combinatoria. 2016, vol. 124, str. 49-6 ISSN 0381-7032. [COBISS.SI-ID [17663833](#)]
5. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed fault diameter of Cartesian graph bundles II. Ars mathematica contemporanea. [Tiskana izd.]. 2015, vol. 8, no. 2, str. 245-258. ISSN 1855-3966. [COBISS.SI-ID [18419478](#)]

Aljoša Peperko:

1. KRAMAR FIJAVŽ, Marjeta, **PEPERKO, Aljoša**, SIKOLYA, Eszter. Semigroups of max-plus linear operators. Semigroup forum, ISSN 0037-1912, 2017, vol. 94, iss. 2, str. 463-476. [COBISS.SI-ID [17775961](#)]
2. KANDIĆ, Marko, **PEPERKO, Aljoša**. On the submultiplicativity and subadditivity of the spectral and essential spectral radius. Banach journal of mathematical analysis : an international electronic journal, ISSN 1735-8787.

- [Online ed.], 2016, vol. 10, 133-146. [COBISS.SI-ID [17493593](#)]
3. **PEPERKO, Aljoša**. Logarithmic convexity of fixed points of stochastic kernel operators. *Positivity*. Apr. 2019, vol. 23, iss. 2, str. 367-377. ISSN 1385-1292. <https://doi.org/10.1007/s11117-018-0611-4>, DOI: [10.1007/s11117-018-0611-4](https://doi.org/10.1007/s11117-018-0611-4). [COBISS.SI-ID [18449497](#)]
 4. **PEPERKO, Aljoša**, GABROVŠEK, Boštjan. *Funkcije več spremenljivk in osnove vektorske analize*. 1. elektronska izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2022. 1 spletni vir (1 datoteka PDF (III, 106 str.)), ilustr. ISBN 978-961-6980-87-6. <https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=134764>, <http://www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:DOC-NMVB26S2>, <https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=134764>. [COBISS.SI-ID [97630467](#)]
 5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID [297341184](#)]

Darja Rupnik Poklukar:

1. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. On three-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(ck,k)$. *Symmetry*. Oct. 2022, vol. 14, iss. 10, str. 1-15, ilustr. ISSN 2073-8994. <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/10/2086>, <https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=141884>, DOI: [10.3390/sym14102086](https://doi.org/10.3390/sym14102086). [COBISS.SI-ID [124962819](#)]
2. GABROVŠEK, Boštjan, NOVAK, Tina, POVH, Janez, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Multiple Hungarian method for k-assignment problem*. *Mathematics*. Nov. 2020, vol. 8, iss. 11, f. 1-18, ilustr. ISSN 2227-7390. <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/11/2050>, DOI: [10.3390/math8112050](https://doi.org/10.3390/math8112050). [COBISS.SI-ID [38799875](#)]
3. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Networks with extremal closeness*. *Fundamenta informaticae*. 2019, vol. 167, no. 3, str. 219-234, ilustr. ISSN 0169-2968. <https://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi1815>, DOI: [10.3233/FI-2019-1815](https://doi.org/10.3233/FI-2019-1815). [COBISS.SI-ID [16652827](#)]
4. ŽEROVNIK, Janez, GABROVŠEK, Boštjan, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**. *Analiza in navadne diferencialne enačbe*. 1. ponatis 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2023. 284 str., graf. prikazi. ISBN 978-961-6980-80-7. [COBISS.SI-ID [162988035](#)]
5. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID [297341184](#)]