

LINEARNA ALGEBRA IN VEKTORSKA ANALIZA

UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

| | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| Predmet: | Linearna algebra in vektorska analiza |
| Course title: | Linear algebra and vector analysis |
| Članica nosilka/UL Member: | UL FS |

| Študijski programi in stopnja | Študijska smer | Letnik | Semestri | Izbirnost |
|--|---------------------------------|-----------|-------------|-----------|
| Strojništvo - razvojno raziskovalni program, prva stopnja, univerzitetni (od študijskega leta 2024/2025 dalje) | Ni členitve (študijski program) | 1. letnik | 2. semester | obvezni |

| | |
|--|---------|
| Univerzitetna koda predmeta/University course code: | 0562743 |
| Koda učne enote na članici/UL Member course code: | 2006-U |

| Predavanja /Lectures | Seminar /Seminar | Vaje /Tutorials | Klinične vaje /Clinical tutorials | Druge oblike študija /Other forms of study | Samostojno delo /Individual student work | ECTS |
|----------------------|------------------|-----------------|-----------------------------------|--|--|------|
| 60 | | 45 | | | 70 | 7 |

| | |
|-----------------------------------|---|
| Nosilec predmeta/Lecturer: | Aljoša Peperko, Darja Rupnik Poklukar, Janez Žerovnik |
|-----------------------------------|---|

| | |
|---|--|
| Izvajalci predavanj: | |
| Izvajalci seminarjev: | |
| Izvajalci vaj: | |
| Izvajalci kliničnih vaj: | |
| Izvajalci drugih oblik: | |
| Izvajalci praktičnega usposabljanja: | |

Vrsta predmeta/Course type:

Obvezni splošni predmet /Compulsory general course

Jeziki/Languages:

Predavanja/Lectures:

Slovenščina

Vaje/Tutorial:

Slovenščina

Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:**Prerequisites:**

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Univerzitetni študijski program I. stopnje Strojništvo - Razvojno raziskovalni program.

Meeting the enrollment conditions for the Academic study programme of Mechanical Engineering - Research and Development program.

Vsebina:**Content (Syllabus outline):**

Linearna algebra:

1. Definicija vektorjev.
 - Koordinatni sistem v prostoru. Standardna ortonormirana baza. Osnovne operacije v koordinatnem in brezkoordinatnem zapisu. Definicija grupe na primeru vektorjev in seštevanja.
2. Skalarni, vektorski in mešani produkt.
 - Definicija in osnovne lastnosti produktov. Fizikalni pomen produktov in uporaba za računanje kotov, navorov, prostornin. Dvakratni vektorski produkt.
3. Enačbi ravnine in premice v prostoru.
 - Uporaba teh enačb za računanje razdalj med geometrijskimi objekti (razdalja med točko in premico, med točko in ravnino, med dvema premicama) in za reševanje drugih geometrijskih nalog.
4. Matrike in osnovne operacije.
 - Seštevanje matrik, množenje matrike s številom, množenje matrik. Determinante. Osnovne lastnosti determinante. Inverzne matrike. Karakterizacija obrnljivih matrik. Matrične enačbe.
5. Sistemi linearnih enačb.
 - Zapis sistema enačb v obliki matrične enačbe. Gaussov postopek.

1. algebra:

1. Definition of vectors.
 - Coordinate system in Euclidean space. Standard orthonormed basis. Basic operations in coordinate and noncoordinate form. Definition of a group based on the example of vectors and addition.
2. Scalar, vector and mixed product
 - Definition and basic properties of the products. Physical meaning of the products and applications for calculation of angles, torque, volumes. Double vector product.
3. Equations of planes and lines in the Euclidean space
 - Applications of these equations for calculation of lengths between geometrical objects (length between a point and a line, between a point and a plane, between two lines) and for solving other geometric assignments.
4. Matrices and basic operations
 - Sumation of matrices, multiplication with a scalar, multiplication of matrices. Determinants. Basic properties of determinants. Invertible matrices. Characterization of invertible matrices. Matrix equations.
5. Systems of linear equations.
 - systems written in the form of a

Analiza rešljivosti sistema enačb. Računanje inverzne matrike. Cramerjevo izrek o rešitvah enolično rešljivega sistema linearnih enačb.

6. Linearni (vektorski) prostori.

- Definicija in primeri za motivacijo.

Linearna neodvisnost. Baza in dimenzija linearnega prostora. Linearne preslikave (operatorji) in njihove lastnosti. Primeri linearnih in nelinearnih preslikav.

7. Prehod med bazami.

- Lastni vektorji in lastne vrednosti linearnih preslikav. Definicija in metoda za računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Primeri linearnih preslikav: translacije, rotacije, odvod, integral.

Vektorska analiza

8. Integrali funkcij več spremenljivk.

- Definicija. Fizikalni zgledi. Fubinijev izrek. Vpeljava novih koordinat. Polarne koordinate.

9. Splošna formula za vpeljavo novih koordinat.

- Jacobijeva matrika. Cilindrične koordinate. Sferične koordinate. Fizikalni zgledi. Krivulje. Ločni parameter.

10. Ukrivljenost.

- Torzija. Skalarna in vektorska polja. Divergenca. Rotor. Krivuljni integral skalarnega polja.

11. Krivuljni integral vektorskega polja.

- Potencialna polja. Vrtinčna polja. Zgledi in fizikalni primeri. Ploskovni integral skalarnega polja.

12. Ploskovni integral vektorskega polja.

- Gaussov izrek. Stokesov izrek. Greenova formula. Zgledi.

Linearni sistemi diferencialnih enačb

13. Linearni sistemi diferencialnih enačb kot modeli v inženirstvu.

- Homogeni sistemi in nehomogeni sistemi. Opis splošne rešitve, prevedba posebnih sistemov na linearno diferencialno enačbo višjega reda.

14. Metoda lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za homogene sisteme 1. reda s konstantnimi koeficienti.

- Partikularna rešitev za splošne

matrix equation. Gauss and Gauss Jordan algorithms. Analysis of solvability of linear systems. Cramer rule.

6. Vector spaces

- Definition and examples for motivation. independence. Basis and dimension of a vector space. Linear mappings (operators) and their properties. Examples of linear and nonlinear mappings.

7. Transition between basis'

- Eigenvectors and eigenvalues of linear maps. Definition and method for calculation of eigenvalues and eigenvectors. Examples of linear maps: translations, rotations, derivate, integral.

Vector analysis

8. Integrals of functions of several variables

- Definition. Physical meaning. Fubini theorem. Substitution (new coordinates). Polar coordinates.

9. General formula for substitution.

- Jacobi matrix. Cylindrical coordinates. Spherical coordinates. Examples from physics. Curves. Length curve parameter.

10. Curvature.

- Torsion. Scalar and vector fields. Divergence. Curl. Line integral of a scalar field.

11. Line integral of a vector field.

- Potential fields. Curl fields. Examples.

12. Surface integral of a vector field

- Gauss theorem. Stokes theorem. Green formula. Examples.

systems of differential equations

13. systems of differential equations as models in engineering.

- Homogeneous systems and nonhomogeneous systems.

Descriptions of a general solution.

Transformation of special systems to a linear equation of a higher order.

14. Method of eigenvalues and eigenvectors for homogeneous systems of first order.

- Particular solution of a general

| | |
|---|---|
| <p>linearne sisteme 1.reda. Prevedba linearne diferencialne enačbe n-tega reda na sistem n enačb 1.reda</p> <p>15. Realne in kompleksne potenčne vrste, lastnosti, konvergenčni radij.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Odvajanje in integriranje realnih potenčnih vrst. Metoda za reševanje linearne diferencialne enačbe z nekonstantnimi koeficienti s pomočjo potenčnih vrst (potenčna metoda). | <p>linear system of first order. Transformation of a linear differential equation of n-th order to a system of n equation of first order.</p> <p>15. Real and complex power series, properties, radius of convergence. - Differentiation and integration of real power series. Method of solution of a linear differential solution with nonconstant coefficients with power series (power method).</p> |
|---|---|

Temeljna literatura in viri/Readings:

| |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. ŽEROVNIK, Janez, GABROVŠEK, Boštjan, NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, ZAKRAJŠEK, Helena. <i>Linearna algebra in vektorska analiza</i>. 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2022. VII, 250 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-86-9. [COBISS.SI-ID 97895939] 2. ŽEROVNIK, Janez. <i>Matematika Popravljen in dopolnjen izd.</i> Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. ISBN 978-961-6980-34-0 [COBISS.SI-ID 289982976] 3. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. <i>Matematika 2 : naloge in postopki reševanja</i>. 1. popravljen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 171 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-33-3. [COBISS.SI-ID 289166080] 4. PEPERKO, Aljoša, PERMAN, Mihael, RUPNIK POKLUKAR, Darja. <i>Matematika 3 : naloge in postopki reševanja</i>. 2. dopolnjen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2020. 210 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-69-2. [COBISS.SI-ID 14594563] 5. E. Kreyszig, <i>Advanced Engineering Mathematics</i>, Wiley, 10th Edition, 2011, ISBN 978-0-470-64613-7 [COBISS.SI-ID 69008385] 6. MIZORI-OBLAK, Pavlina. <i>Matematika za študente tehnike in naravoslovja : prvi del</i>. Ponatis 6. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2009. ISBN 978-961-6536-30-1 [COBISS.SI-ID 248571648] |
|---|

Cilji in kompetence:

| | |
|--|--|
| <p>Cilji:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij linearne algebre, vektorske analize in sistemov linearnih diferencialnih enačb. 2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev nekaterih fizikalnih in tehniških problemov <p>Kompetence:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij | <p>Objectives:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Students learn theoretical basis of linear algebra, vector analysis and systems of linear differential equations. 2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some physical and engineering problems. <p>Competences:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. The ability to apply the obtained mathematical knowledge of of linear algebra, vector analysis, vector |
|--|--|

| | |
|---|--|
| <p>linearne algebre, vektorske analize in sistemov linearnih diferencialnih enačb za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</p> <p>2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</p> | <p>analysis and systems of linear differential equations for modelling, solving and analysis professional technical problems from mechanical engineering (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</p> <p>2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</p> |
|---|--|

Predvideni študijski rezultati:

Intended learning outcomes:

| | |
|---|---|
| <p>Znanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Obvladajo metode osnovne linearne algebre, osnovne vektorske analize in teorije sistemov linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti (Z1). • Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1). <p>Spretnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno zahtevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4). • Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4). | <p>Knowledge:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mastering the methods of basic linear algebra, basic vector analysis and the theory of systems of linear differential equations with constant coefficients (Z1). • Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1). <p>Skills:</p> <ul style="list-style-type: none"> • The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4). • Solid analytic skill of thinking and analytic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4). |
|---|---|

Metode poučevanja in učenja:

Learning and teaching methods:

| | |
|---|--|
| <p>P1 Avditorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.</p> <p>P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.</p> <p>P3 Avditorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepí z računskimi primeri.</p> <p>P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici</p> | <p>P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied problems.</p> <p>P2 Presenting the content according to the explained system.</p> <p>P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.</p> <p>P12 Individualised homeworks in a web classroom.</p> |
|---|--|

Načini ocenjevanja:**Delež/
Weight****Assessment:**

| | | |
|-------------------|---------|-------------------|
| Pisni izpit. | 80,00 % | Written exam. |
| Teoretični izpit. | 20,00 % | Theoretical exam. |

Ocenjevalna lestvica:**Grading system:**

| | |
|--|--|
| 5 - 10, pri čemer velja, da je pozitivna ocena od 6 - 10 | 5 - 10, a student passes the exam if he is graded from 6 to 10 |
|--|--|

Reference nosilca/Lecturer's references:**Janez Žerovnik:**

1. SHAO, Zehui, JIANG, Huiqin, WU, Pu, WANG, Shaohui, **ŽEROVNIK, Janez**, ZHANG, Xiaosong, LIU, Jia-Bao. On 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs. *Discrete applied mathematics*. [Print ed.]. March. 2019, vol. 257, str. 370-384, ilustr. ISSN 0166-218X. [COBISS.SI-ID [16369179](#)]
2. REPOLUSK, Polona, **ŽEROVNIK, Janez**. Formulas for various domination numbers of products of paths and cycles. *Ars combinatoria*. 2018, vol. 137, str. 177-20 ISSN 0381-703 [COBISS.SI-ID [18281305](#)]
3. ZUPAN, Hugo, HERAKOVIČ, Niko, **ŽEROVNIK, Janez**, BERLEC, Tomaž. Layout optimization of a production cell. *International journal of simulation modelling*. Dec. 2017, vol. 16, nr. 4, str. 603-616, ilustr. ISSN 1726-4529. [COBISS.SI-ID [15898139](#)]
4. ŠPARL, Petra, WITKOWSKI, Rafał, **ŽEROVNIK, Janez**. Multicoloring of cannonball graphs. *Ars mathematica contemporanea*. [Tiskana izd.]. 2016, vol. 10, no. 1, str. 31-4 ISSN 1855-3966. [COBISS.SI-ID [7410707](#)]
5. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Improved upper bounds for vertex and edge fault diameters of Cartesian graph bundles. *Discrete applied mathematics*. [Print ed.]. 30 Jan. 2015, vol. 181, str. 90-97. ISSN 0166-218X. [COBISS.SI-ID [18123542](#)]

Aljoša Peperko:

1. MANJEGANI, S. M., **PEPERKO, Aljoša**, SHOKOOH SALJOOGHI, H. Asymptotic formulae and inequalities for point spectrum in max algebra. *Linear algebra and its applications*. [Print ed.]. Feb. 2022, vol. 634, str. 112-136. ISSN 00243795. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379521003967>, DOI: [10.1016/j.laa.2021.11.002](#). [COBISS.SI-ID [85789443](#)]
2. KHALEGHZADE, Sedighe, ZANGIABAD, Mostafa, **PEPERKO, Aljoša**, HAJARIAN, Masoud. Perron-Frobenius theory for some classes of nonnegative tensors in the max algebra. *Linear algebra and its applications*. [Print ed.]. May 2022, vol. 641, str. 115-142. ISSN 0024-3795. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0024379522000544>, DOI: [10.1016/j.laa.2022.02.011](#). [COBISS.SI-ID [97902595](#)]
3. PUSTAVRH, Jan, **PEPERKO, Aljoša**, MAJDIČ, Franc. Razvoj hidravličnega sistema Stewartove ploščadi. *Ventil : revija za fluidno tehniko in avtomatizacijo*. [Tiskana izd.]. dec. 2022, letn. 28, št. 6, str. 396-403, ilustr. ISSN 1318-7279.

<http://www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:doc-U4Q0BOVI>. [COBISS.SI-ID [136607747](#)]

4. ŽEROVNIK, Janez, GABROVŠEK, Boštjan, NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Linearna algebra in vektorska analiza*. 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2022. VII, 250 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-86-9. [COBISS.SI-ID [97895939](#)]
5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 1. popravljena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 171 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-33-3. [COBISS.SI-ID [289166080](#)]

Darja Rupnik Poklukar:

1. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. Double Roman domination in generalized Petersen graphs $P(ck, k)$. *Symmetry*. May 2022, vol. 14, iss. 6, str. 1-15, ilustr. ISSN 2073-8994. <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/6/1121>, <https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=137160>, DOI: [10.3390/sym14061121](https://doi.org/10.3390/sym14061121). [COBISS.SI-ID [110382595](#)]
2. NOVAK, Tina, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *The Hosoya polynomial of double weighted graphs*. *Ars mathematica contemporanea*. [Tiskana izd.]. 2018, vol. 15, no. 2, str. 441-466, ilustr. ISSN 1855-3966. <https://amc-journal.eu/index.php/amc/article/download/1297/1239>, DOI: [10.26493/1855-3974.1297.c7c](https://doi.org/10.26493/1855-3974.1297.c7c). [COBISS.SI-ID [16257563](#)].
3. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Reliability Hosoya-Wiener polynomial of double weighted trees*. *Fundamenta informaticae*. 2016, vol. 147, nr. 4, str. 447-456, ilustr. ISSN 0169-2968. <http://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi1416>, DOI: [10.3233/FI-2016-1416](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1416). [COBISS.SI-ID [15186971](#)].
4. PEPERKO, Aljoša, PERMAN, Mihael, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**. *Matematika 3 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2020. 210 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-69-2. [COBISS.SI-ID [14594563](#)]
5. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Tehniška matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2019. 221 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-56-2. [COBISS.SI-ID [298792960](#)]