

# ANALIZA IN NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

## UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

<b>Predmet:</b>	Analiza in navadne diferencialne enačbe
<b>Course title:</b>	Calculus and ordinary differential equations
<b>Članica nosilka/UL Member:</b>	UL FS

<b>Študijski programi in stopnja</b>	<b>Študijska smer</b>	<b>Letnik</b>	<b>Semestri</b>	<b>Izbirnost</b>
Strojništvo - razvojno raziskovalni program, prva stopnja, univerzitetni	Ni členitve (študijski program)	1. letnik	1. semester	obvezna

<b>Univerzitetna koda predmeta/University course code:</b>	0562738
<b>Koda učne enote na članici/UL Member course code:</b>	2001-U

<b>Predavanja /Lectures</b>	<b>Seminar /Seminar</b>	<b>Vaje /Tutorials</b>	<b>Klinične vaje /Clinical tutorials</b>	<b>Druge oblike študija /Other forms of study</b>	<b>Samostojno delo /Individual student work</b>	<b>ECTS</b>
75		60			90	9

<b>Nosilec predmeta/Lecturer:</b>	Aljoša Peperko, Darja Rupnik Poklucar, Janez Žerovnik
-----------------------------------	---

<b>Izvajalci predavanj:</b>	
<b>Izvajalci seminarjev:</b>	
<b>Izvajalci vaj:</b>	
<b>Izvajalci kliničnih vaj:</b>	
<b>Izvajalci drugih oblik:</b>	
<b>Izvajalci praktičnega usposabljanja:</b>	

<b>Vrsta predmeta/Course</b>	Obvezni splošni predmet /Compulsory general course
------------------------------	--

**type:**

--

**Jeziki/Languages:**

Predavanja/Lectures:	Slovenščina
Vaje/Tutorial:	Slovenščina

**Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:**

**Prerequisites:**

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Univerzitetni študijski program I. stopnje Strojništvo - Razvojno raziskovalni program.	Meeting the enrollment conditions for the Academic study programme of Mechanical Engineering - Research and Development program.
---	--

**Vsebina:**

**Content (Syllabus outline):**

<p>Uvod in osnovni pojmi</p> <p>1. Matematika in matematično modeliranje.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Korektnost in ustreznost modela.</li></ul> <p>Množice in števila. Kompleksna števila. Polarni zapis kompleksnega števila. Zaporedja in limita zaporedja. Številске vrste (realne in kompleksne). Konvergenčni kriteriji (primerjalni, kvocientni, korenski). Realne funkcije realne spremenljivke in odvod</p> <p>2. Realne funkcije.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Elementarne funkcije. Limita funkcije. Zvezne funkcije. Osnovne lastnosti zveznih funkcij. Definicija in geometrijski pomen odvoda. Diferencial. Pravila za odvajanje. Odvodi elementarnih funkcij.</li></ul> <p>3. Izreki o odvedljivih funkcijah.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Rolleov, Lagrangeov in Cauchyjev izrek. L'Hopitalovo pravilo. Odvodi višjega reda. Taylorjeva formula. Taylorjeva vrsta analitične funkcije. Definicija pomembnih kompleksnih funkcij s pomočjo Taylorjevih vrst. Eulerjeva formula.</li></ul> <p>4. Lokalni ekstremi realne funkcije.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Stacionarne točke odvedljive funkcije. Analiza lastnosti funkcij s pomočjo prvega in drugega odvoda. Risanje grafov funkcij. Uporaba odvoda. Nedoločeni in določeni integral</li></ul> <p>5. Definicija določenega in nedoločenega</p>	<p>Introduction and basics</p> <p>1. Mathematics and mathematical modelling.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Correctness and suitability of the model. Sets and numbers. Complex numbers. Polar form of a complex number. Sequences and a limit of a sequence. Number series (real and complex). Convergence tests (comparison, ratio, root).</li></ul> <p>Real functions of real variables</p> <p>2. Real functions.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Elementary functions. Limit of a function. Continuous functions. Basic properties of continuous functions. Definition of derivative and its geometrical meaning. Differential. Rules for derivation. Derivates of elementary functions.</li></ul> <p>3. Theorems for differential functions.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Rolle, Lagrange and Cauchy. L'Hopital rule. Derivates of higher order. Taylor formula. Taylor series of analitic functions. Definition of important complex functions with Taylor series. Euler formula.</li></ul> <p>4. Local extrema of a real function.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Stationary points of differentiable functions. Property analysis of functions via the first and second and derivates. Drawing of graphs of functions. Applications of a derivate. Indefinite and definite integral</li></ul> <p>5. Definition of definite and indefinite</p>
---	--

<p>integrala.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lastnosti integrala. Osnovni izrek analize. Nedoločeni integrali nekaterih elementarnih funkcij.</li> </ul> <p>6. Osnovne metode integriranja.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vpeljava nove spremenljivke in integracija po delih. Posplošeni integral. Uporaba integrala: prostornine, ploščine izsekov (navor), težišča, itd.</li> </ul> <p>Realne funkcije dveh ali več realnih spremenljivk</p> <p>7. Definicija realne funkcije več spremenljivk.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Geometrijski in fizikalni primeri. Limita in zveznost. Parcialni odvodi. Gradient. Totalni diferencial. Tangentna ravnina.</li> </ul> <p>8. Višji parcialni odvodi.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definicija in osnovne lastnosti. Definicija odvoda v poljubni smeri. Smerni odvod in gradient. Formula za odvajanje sestavljenih funkcij (verižno pravilo).</li> </ul> <p>9. Definicija lokalnega in globalnega ekstrema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Klasifikacija lokalnih ekstremov za gladke funkcije več spremenljivk. Vezani ekstremi, Lagrangeova metoda.</li> </ul> <p>10. Izrek o implicitni funkciji.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta za funkcije več spremenljivk. Primeri uporabe za modeliranje nelinearnih problemov.</li> </ul> <p>Navadne diferencialne enačbe</p> <p>11. Osnovni pojmi.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Modeliranje z diferencialnimi enačbami. Primeri navadnih diferencialnih enačb. Cauchyjeva naloga. Grafična metoda. Enačba z ločljivima spremenljivkama. Metoda integrirajočih množiteljev.</li> </ul> <p>12. Linearne diferencialne enačbe 1.reda.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Homogene in nehomogene enačbe. Splošna metoda za reševanje linearne enačbe prvega reda. Bernoulijeva enačba. Aplikacije. Populacijska dinamika.</li> </ul> <p>13. Homogene linearne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Karakteristična kvadratna enačba. Nehomogene linearne enačbe drugega</li> </ul>	<p>integral.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Properties of integral. Fundamental theorem of analysis. Indefinite integrals of elementary functions.</li> </ul> <p>6. Basic methods of integration.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Substitution and per partes integration. Improper integral. Applications of integral: volumes, plates, torque, center of gravity</li> </ul> <p>Real functions several real variables</p> <p>7. Definition of a real function of several variables.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Geometrical and physical examples. Limit and continuity. Partial derivatives. Gradient. Total differential. Tangent plane.</li> </ul> <p>8. Higher order partial derivatives.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definition and basic properties. Definition of a derivate in arbitrary direction. Directional derivate and gradient. Chain rule.</li> </ul> <p>9. Definition of local and global extrema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Classification of local extrema for smooth functions of several variables. Extrema under additional conditions, Lagrange method.</li> </ul> <p>10. Implicit function theorem.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Taylor formula and Taylor series for functions of several variables. Examples of application for modelling of nonlinear problems.</li> </ul> <p>Ordinary differential equations.</p> <p>11. Basics.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Modelling with differential equations. Examples of ordinary differential equations. Cauchy task. Graphical method. Separable ordinary differential equations. Integrating factors.</li> </ul> <p>12. Linear differential equations of first order.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Homogeneous and nonhomogeneous equations. General method for solving a linear differential equation of first order. Bernoulli equation. Applications. Population dynamics.</li> </ul> <p>13. Homeogenous linear differential equations of second order with constant coefficients.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Characteristic square equation. Nonhomeogenous linear differential equations of second order. Examples</li> </ul>
---	--

<p>reda. Primeri iz fizike in tehnike. Masno-vzmetni sistemi. Vsiljene oscilacije. Resonanca.</p> <p>14. Metode za reševanje nehomogenih linearnih diferencialnih enačb drugega reda.</p> <p>- Variacija konstant, metoda nedoločenih koeficientov. Euler-Cauchyjeve enačbe.</p> <p>15. Linearne diferencialne enačbe višjega reda.</p> <p>- Metode za zniževanje reda diferencialne enačbe. Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Reševanje posebnih homogenih enačb poljubnega reda.</p> <p>Opomba. Snov 9 in 10 tedna se lahko spredava na koncu semestra, če se pokaže potreba po zgodnejši obravnavi diferencialnih enačb zaradi sinhronizacije z drugimi predmeti.</p>	<p>from physics and engineering. Mass-spring systems. Forced oscillations. Resonance.</p> <p>14. Methods for solving nonhomeogenous linear differential equations of second order.</p> <p>- Variation of constants, unknown constants method. Euler-Cauchy equations.</p> <p>15. Linear differential equations of arbitrary finite order.</p> <p>- Linear differential equations with constant coefficients. Solving special homogeneous linear equations of arbitrary order.</p> <p>Remark. The material of week 9 and 10 can be moved to the end of the course if DE are needed earlier to be synchronized with other subjects of the program.</p>
--	--

### Temeljna literatura in viri/Readings:

1. ŽEROVNIK, Janez. Matematika Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2014.
2. ŽEROVNIK, Janez. Matematika Popravljen in dopolnjen 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.
3. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 9th Edition, 2006
4. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. Matematika 1 : naloge in postopki reševanja. 2. dopolnjen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018.
5. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. Matematika 2 : naloge in postopki reševanja. 1. popravljen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.
6. PEPERKO, Aljoša, PERMAN, Mihael, RUPNIK POKLUKAR, Darja. Matematika 3 : naloge in postopki reševanja. 1. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 184 str.
7. ŽEROVNIK, Janez, BANIČ, Iztok, HRASTNIK LADINEK, Irena, ŠPACAPAN, Simon. Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike. 4. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2011
8. MIZORI-OBLAK, Pavlina. Matematika za študente tehnike in naravoslovja : prvi del. Ponatis 6. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2009.

### Cilji in kompetence:

- Cilji:
1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij analize in navadnih diferencialnih enačb.
  2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev

### Objectives and competences:

- Objectives:
1. Students learn theoretical basis from the fields of calculus and ordinary differential equations.
  2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some

<p>nekaterih fizikalnih in tehniških problemov</p> <p>Kompetence:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij analize in navadnih diferencialnih enačb za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</li> <li>2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</li> </ol>	<p>physical and engineering problems.</p> <p>Competences:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. The ability to apply the obtained mathematical knowledge of calculus and ordinary differential equations for modelling, solving and analysis professional technical problems from mechanical engineering (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</li> <li>2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</li> </ol>
---	---

<b>Predvideni študijski rezultati:</b>	<b>Intended learning outcomes:</b>
<p>Znanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Obvladajo metode osnovne analize in navadnih diferencialnih enačb (Z1).</li> <li>• Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1).</li> </ul> <p>Spretnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno zahtevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>• Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>	<p>Knowledge:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mastering the methods of basic calculus and ordinary differential equations (Z1).</li> <li>• Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1).</li> </ul> <p>Skills:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>• Solid analytic skill of thinking and analitic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>

<b>Metode poučevanja in učenja:</b>	<b>Learning and teaching methods:</b>
<p>P1 Avditorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.</p> <p>P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.</p> <p>P3 Avditorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepi z računskimi primeri.</p>	<p>P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied problems.</p> <p>P2 Presenting the content according to the explained system.</p> <p>P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.</p>

P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici	P12 Individualised homeworks in a web classroom.
--	--

<b>Načini ocenjevanja:</b>	<b>Delež/ Weight</b>	<b>Assessment:</b>
Pisni izpit.	50,00 %	Written exam.
Teoretični izpit.	50,00 %	Theoretical exam.

### **Reference nosilca/Lecturer's references:**

#### **Janez Žerovnik**

1. RUPNIK POKLUKAR, Darja, **ŽEROVNIK, Janez**. Networks with extremal closeness. Fundamenta informaticae. 2019, vol. 167, no. 3, str. 219-234, ilustr. ISSN 0169-2968.]
2. DENG, Fei, JIANG, Huiqin, LIU, Jia-Bao, RUPNIK POKLUKAR, Darja, SHAO, Zehui, WU, Pu, **ŽEROVNIK, Janez**. The Sanskruti index of trees and unicyclic graphs. Open chemistry. Jan. 2019, vol. 17, iss. 1, f. 448-455, ilustr. ISSN 2391-5420.
3. KALJUN, David, **ŽEROVNIK, Janez**. Improving approximation by switching between two error functions. Croatian operational research review : CRORR. [Tiskana izd.]. 2017, vol. 8, nr. 1, str. 107-118, ilustr. ISSN 1848-0225.
4. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed connectivity of Cartesian graph products and bundles. Ars combinatoria. 2016, vol. 124, str. 49-6 ISSN 0381-7032.
5. ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Mixed fault diameter of Cartesian graph bundles II. Ars mathematica contemporanea. [Tiskana izd.]. 2015, vol. 8, no. 2, str. 245-258. ISSN 1855-3966.

#### **Aljoša Peperko**

1. KRAMAR FIJAVŽ, Marjeta, **PEPERKO, Aljoša**, SIKOLYA, Eszter. Semigroups of max-plus linear operators. Semigroup forum, ISSN 0037-1912, 2017, vol. 94, iss. 2, str. 463-476.
2. KANDIĆ, Marko, **PEPERKO, Aljoša**. On the submultiplicativity and subadditivity of the spectral and essential spectral radius. Banach journal of mathematical analysis : an international electronic journal, ISSN 1735-8787. [Online ed.], 2016, vol. 10, 133-146.
3. **PEPERKO, Aljoša**. On the continuity of the generalized spectral radius in max algebra. Linear Algebra and its Applications, ISSN 0024-3795. [Print ed.], 2011, vol. 435, iss. 4, str. 902-907.
4. GABROVŠEK, Boštjan, **PEPERKO, Aljoša**. Hitro množenje velikih števil. Presek : list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, ISSN 0351-6652, 2016/2017, letn. 44, št. 1, str. 14-15, ilustr. [COBISS.SI-ID [17752409](#)]
5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. Matematika 1 : naloge in postopki reševanja. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID [297341184](#)]

#### **Darja Rupnik Poklukar**

1. GABROVŠEK, Boštjan, NOVAK, Tina, POVH, Janez, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Multiple Hungarian method for k-assignment problem*. Mathematics. Nov. 2020, vol. 8, iss. 11, f. 1-18, ilustr. ISSN 2227-7390. <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/11/2050>, DOI: [10.3390/math8112050](https://doi.org/10.3390/math8112050). [COBISS.SI-ID [38799875](#)], [JCR, SNIP, WoS]
2. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Networks with extremal closeness*. Fundamenta informaticae. 2019, vol. 167, no. 3, str. 219-234, ilustr. ISSN 0169-2968. <https://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi1815>, DOI: [10.3233/FI-2019-1815](https://doi.org/10.3233/FI-2019-1815). [COBISS.SI-ID [16652827](#)], [JCR, SNIP, WoS do 12. 7. 2020: št. citatov (TC): 2, čistih citatov (CI): 2, Scopus do 29. 12. 2020: št. citatov (TC): 4, čistih citatov (CI): 3]
3. DENG, Fei, JIANG, Huiqin, LIU, Jia-Bao, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, SHAO, Zehui, WU, Pu, ŽEROVNIK, Janez. *The Sanskruti index of trees and unicyclic graphs*. Open chemistry. Jan. 2019, vol. 17, iss. 1, f. 448-455, ilustr. ISSN 2391-5420. <https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/chem.2019.17.issue-1/chem-2019-0046/chem-2019-0046.xml>, DOI: [10.1515/chem-2019-0046](https://doi.org/10.1515/chem-2019-0046). [COBISS.SI-ID [16758043](#)], [JCR, SNIP, WoS, Scopus]
4. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 1 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2018. 215 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-00-5. [COBISS.SI-ID [297341184](#)]
5. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 1. popravljena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 171 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-33-3. [COBISS.SI-ID [289166080](#)]